

الأستاذ:  
روبيح محمد



سلسلة تاج العلوم

KIMOU.

الباز في

# الرياضيات

علوم تجريبية

3

الدوال  
المتتاليات  
الهندسة

الثالثة ثانوي



دار فردجة

حسب مقرر وزارة التربية الوطنية

BAC

# الباز في الرياضيات

لسنة الثالثة ثانوي  
علوم تجريبية

- الدوال.
- المتتاليات.
- الهندسة: الأعداد المركبة ...

الأستاذ: محمد رويح

منشورات قرطبة وغرناطة

## بسم الله الرحمن الرحيم

بعد قراءة متأنية وواعية لمحتوي البرنامج المخصص للسنة الثالثة شعبة : العلوم التجريبية يتبين أن له ثلاث ركائز أساسية يقوم عليها بناؤه وهي:

التحليل	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. دراسة دالة صماء، مثلثية، أسية، لوغاريتمية (المشتق، القيم الحدية، السلوك التقاربي لدالة، التمثيل البياني والقراءة البيانية لمنحن).</li> <li>2. توظيف دوال صماء، مثلثية، أسية، لوغاريتمية في حل مشكلات من الواقع.</li> <li>3. حل مسائل الاستمثال (البحث عن القيم المثلى) باستعمال الدوال أعلاه.</li> <li>4. توظيف الحساب التكاملي لحساب مساحات مستوية ولحل مشكلات</li> <li>5. دراسة سلوك متتالية (اتجاه التغير، التقارب، ...)</li> <li>6. توظيف المتتاليات لحل مشكلات.</li> </ol>
الهندسة	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. توظيف الأعداد المركبة لمعالجة وضعيات بسيطة تتعلق بخواص الأشكال الهندسية.</li> <li>2. حل مسائل في التحويلات النقطية المألوفة بتوظيف الأعداد المركبة.</li> <li>3. توظيف الجداء السلمي في الفضاء لتعيين معادلة ديكارتية لمستوى ولحساب المسافة بين نقطة ومستوى، وللبرهان على خواص التعامد ولتعيين مجموعات النقط.</li> <li>4. توظيف معادلات ديكارتية وتمثيلات وسيطية لتعيين تقاطع مستويات ومستقيمات.</li> <li>5. حل مسائل حول محال هندسية وإنشاءات هندسية باستعمال الأداة الأكثر نجاعة (الأعداد المركبة، التحويلات النقطية، المرجح، الهندسة البحتة...).</li> </ol>
الإحصاء والاحتمالات	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. توظيف خواص الاحتمالات لحل مسائل بسيطة تعالج ظواهر عشوائية وبصفة خاصة تلك الظواهر التي تعتمد على الاحتمالات المتساوية.</li> </ol>

2. توظيف قوانين في التحليل التوفيقي لحل مسائل في الاحتمالات.
  3. حل مسائل تتعلق بتكرار تجربة وذلك باستعمال قوانين الاحتمالات المنتظمة المتقطعة، قانون برنولي، القانون الثنائي.
  4. حل مسائل تتدخل فيها المتغيرات العشوائية المتقطعة و/أو المستمرة والتي يمكن إيجاد قانون احتمالها ببساطة.
  5. توظيف المحاكاة لتقرير تلاءم معطيات تجربة واقعية مع نموذج احتمالي مقترح.
- (نكتفي بنموذج احتمالي متساو)

كما أن هذه المفاهيم حددت لها منهجية خاصة لتناولها تقوم أساسا على الأنشطة المختلفة التي يساهم فيها المتعلم بشكل فعال وأساسي أما دور المعلم فهو التوجيه والملاحظة والتدخل أحيانا قليلة ويختار هذه الأنشطة بطريقة تقارب فيها المفاهيم المستهدفة.

كما أن جزءا من هذه الأنشطة يختار من الواقع الاجتماعي حتى يكون للمعرفة المكتسبة معنى حسي وتخفي تلك الهوة التي كانت تفصل المفاهيم الرياضية المجردة عن المشاكل المعيشة - على الأقل في هذه المرحلة -

ويجاب على السؤال القديم الجديد ما جدوى دراسة الرياضيات ؟ وهذه المقاربة بين الأنشطة (الكفاءات) والمفاهيم المستهدفة هي إحدى طرائق التدريس المسماة: "المقاربة بالكفاءات"

**والخلاصة:** « أن المتعلم يصنع المعرفة بنفسه ولا يتلقاها من الآخرين تلقينا » وهذا ما يجعله مفكرا مبدعا مستغلا لمعارفه في واقع حياته، بدل أن يكون عاجزا عن التفكير، مسلوب الإرادة وعالة على الآخرين.

بهذه الملاحظات وغيرها قمت بهذا العمل المتواضع والذي أمل منه أن يساهم ولو بجزء يسير في إثراء معارف المتعلم في هذه المرحلة من التعليم وإثراء مكتبة الرياضيات والمنهجية التي اتبعتها لإنجاز هذا العمل تقوم على ثلاث مراحل:

الأولى: التذكير - بإيجاز - بالمعارف ذات الصلة وبالخواص وبالطرائق المختلفة و... لاستعمالها في معالجة التمارين المقترحة.

الثانية: اقتراح تمارين متنوعة ومتفاوتة الصعوبة تتسجم والمفهوم المستهدف.

الثالثة: اقتراح حلول للتمارين المقترحة، ولقد حاولت قدر الإمكان أن يكون الحل مفصلا مراعاة لمستوى المتعلم وظروفه في هذه المرحلة.

الرابعة: اقتراح تمارين ومسائل غير محلولة في نهاية كل فصل وهي بمثابة تقويم ذاتي ينتج عنه تحديد مستوى الاستيعاب للمفاهيم المدروسة.

## الدوال العددية

الدالة العددية لمتغير حقيقي :

ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  ، عددا حقيقيا وحيدا ونرمز إليها بالرمز  $f$  أو  $g$  أو  $h$  ...  
ولأجل الاختصار نقول : دالة عددية دون ذكر كلمة " لمتغير حقيقي ". أو نقول : دالة فقط.  
نرمز إلى مجموعة تعريف دالة  $f$  بالرمز  $D$  أو  $D_f$  وهي :  
مجموعة الأعداد الحقيقية  $x$  بحيث :  $f(x) \in \mathbb{R}$  .  
وللتعبير عن الدالة  $f$  نكتب :  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

( لاحظ الفرق بين السهمين )  $x \mapsto f(x)$

والعدد الحقيقي  $f(x)$  هو صورة  $x$  بالدالة  $f$  ، كما أن  $x$  سابقة للعدد  $f(x)$

أمثلة على مجموعة تعريف دالة :

1- الدالة المعرفة بالعلاقة  $f(x) = -5x^2 + 3$

إن  $D = \mathbb{R}$  لأن : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) \in ]-\infty, +\infty[$  .

إذا كانت عبارة الدالة كثير حدود فإن :  $D = ]-\infty, +\infty[$

2- الدالة المعرفة بالعلاقة  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

إن  $D = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +2[ \cup ]+2, +\infty[$  لأن :

$f(x) = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$  ( اكتشف هذا بالآلة الحاسبة )

3- الدالة المعرفة بالعلاقة  $f(x) = \frac{-2x+3}{-2x^2-x+3}$

لا يمكننا تعيين الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام معدوما مباشرة ، نلجأ إلى الآتي :

• نحل المعادلة  $-2x^2 - x + 3 = 0$  فنجدها تقبل حلين هما :  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}$

•  $D = ]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]-\frac{3}{2}, 1[ \cup ]1, +\infty[$

إذا كانت عبارة الدالة كسرا ناطقا فإن :

$D = \mathbb{R} \setminus \{ \text{الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام يساوي 0} \}$

ولعين الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام يساوي 0 بإحدى الطريقتين الآتيتين :

(1) بالملاحظة والاستنتاج (المثال 2) .

(2) بحل المعادلة :  $0 = \text{المقام في } \mathbb{R}$  (المثال 3) .

4- الدالة المعرفة بالعلاقة  $f(x) = \sqrt{x}$

إن  $D = [0, +\infty[$  لأن : إذا كان  $x < 0$  فإن  $f(x) \notin \mathbb{R}$  ( اكتشف هذا بالآلة الحاسبة )

5- الدالة المعرفة بالعلاقة  $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

لا يمكننا تعيين الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام معدوما مباشرة ، نلجأ إلى الآتي :



فتلجأ إلى الآتي:

• نحل المتراجحة  $x^2 + x - 2 \geq 0$  فنجد حلولها وهي:  $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

•  $D = ]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

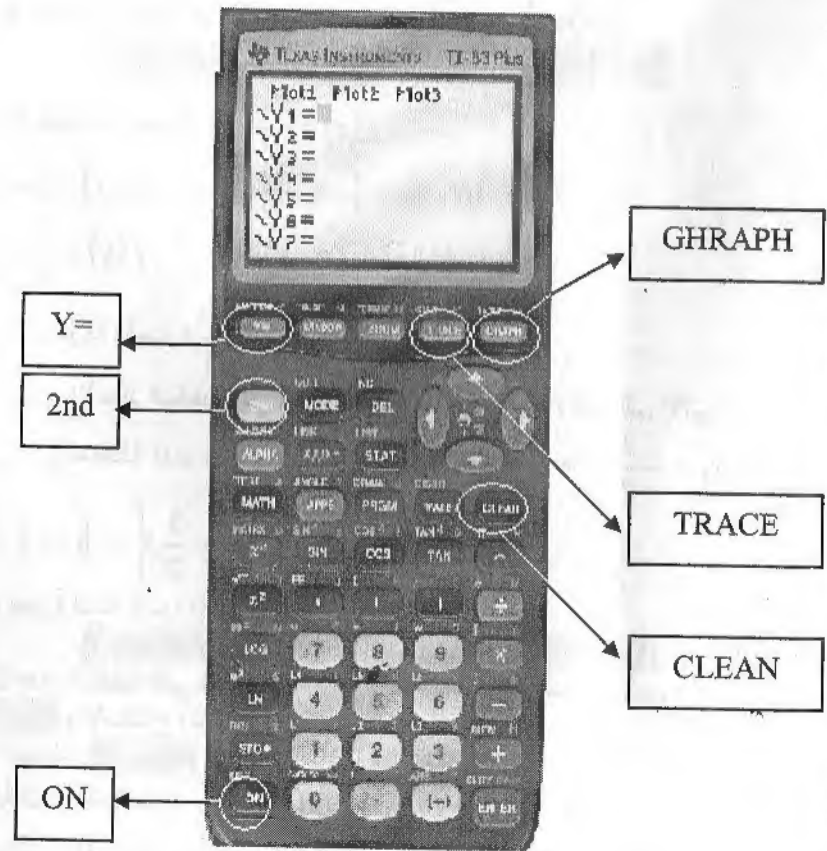
إذا كانت عبارة الدالة من الشكل  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  فإن:

$D$  هي مجموعة حلول المتراجحة:  $g(x) \geq 0$

المنحنى الممثل لدالة عددية  $f$  هو مجموعة النقط من المستوي، المزود بمعلم  $(O, I, J)$ ،

والتي إحداثياتها  $(x, f(x))$  و  $x$  من مجموعة التعريف  $D$ . ويتم التمثيل بطرق منها:

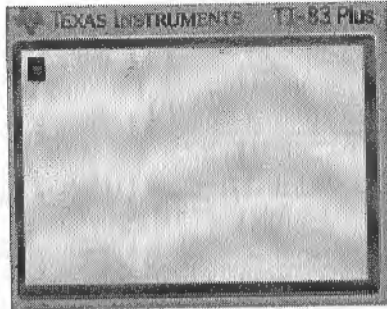
① الآلة الحاسبة البيانية ك: (TI-83+) وهي الأكثر استعمالاً وهذه صورتها:



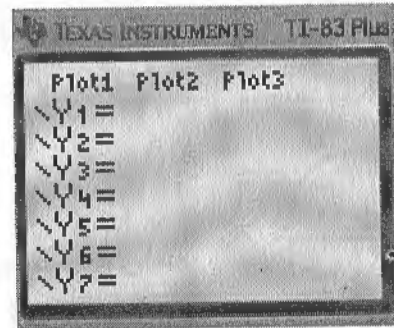
التمثيل البياني للدالة  $x-1+\frac{2}{x-2}$  في معلم متعامد ومتجانس

باستعمال TI-83+

- نشغل الآلة بالضغط على اللمبة  $\square$  ON فتظهر الشاشة:



هذا إذا استعملت اللمبة  $\square$  CLEAN قبل غلق الآلة.

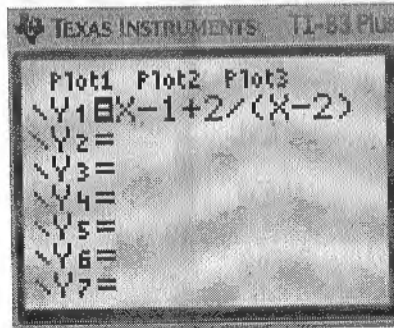


- نضغط على اللمبة  $\square$  Y= فتظهر الشاشة الآتية:

نحجز (نكتب) العبارة الدالة:  $x-1+\frac{2}{x-2}$

وفق لغة الآلة كما هو مبين في الشكل المقابل

باستعمال لوحة مفاتيح الحاسبة، فتظهر الشاشة:



- نضغط على اللمبة  $\square$  TRACE فتظهر الشاشة:

أخيرا وبعد رسم التمثيل البياني للدالة ، لنا الخياران إما أن نحتفظ به لاستعمال لاحق

فنضغط على اللمسة **2nd** ثم على اللمسة **OFF** لغلق الحاسبة.

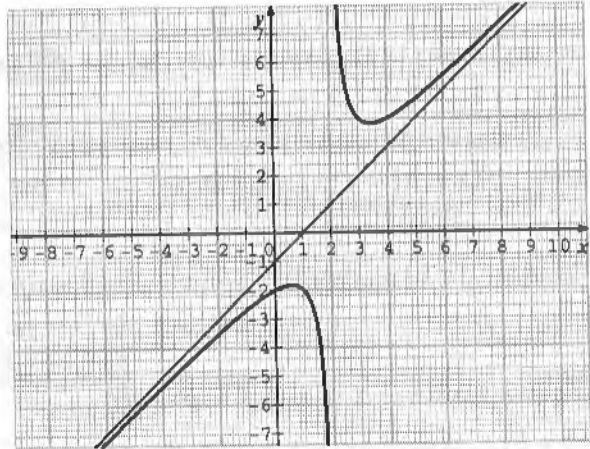
أو نحدفه نهائيا بالضغط على اللمسة **CLEAN** ومن ثم على اللمسة **OFF**

فاللمسة **CLEAN** تمحو المخزون في الذاكرة وتستعمل قبل بداية أي عمل جديد .

② باستعمال برمجية مناسبة (Logiciel) كـ : **SINQUANON** أو غيره .

التمثيل البياني للدالة  $x-1+\frac{2}{x-2}$  في معلم متعامد ومتجانس

باستعمال البرمجية **SINQUANON**



③ يدويا بعد دراسة الدالة . (سياتي)

الدالة الزوجية والدالة الفردية :  $f$  دالة مجموعة تعريفها  $D$

• نقول عن  $f$  إنها زوجية على  $D$  إذا كانت  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 وكان  $f(-x) = f(x)$  من أجل كل عدد  $x$  من  $D$ .

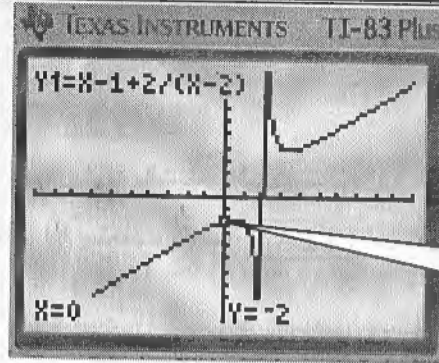
ويكون المنحني الممثل للدالة الزوجية في المستوى المزود بمعلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور الترتيب .

• نقول عن  $f$  إنها فردية على  $D$  إذا كانت  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 وكان  $f(-x) = -f(x)$  من أجل كل عدد  $x$  من  $D$ .

ويكون المنحني الممثل للدالة الفردية في المستوى المزود بمعلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى المبدأ  $O$  .

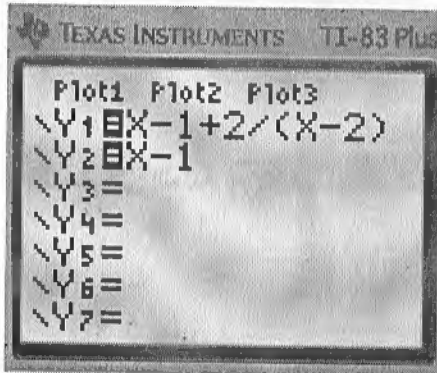
أمثلة : 1- الدالة  $x \mapsto x^2 - 5$  زوجية على  $\mathbb{R}$  ، لأن :

• المجموعة  $\mathbb{R}$  متناظرة بالنسبة إلى 0.



إن الرقمين الظاهرين أسفل الشاشة هما إحداثيتا النقطة المتحركة على المنحني ، ويتغيران بتغيير موضعها ، باستعمال الأسهم الأربعة .

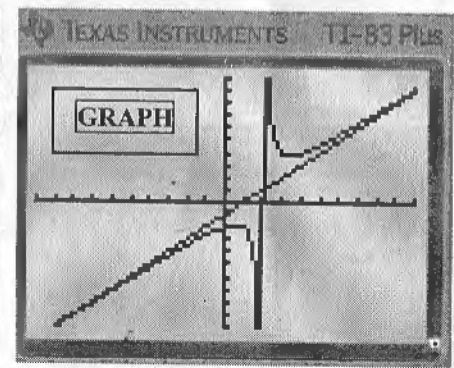
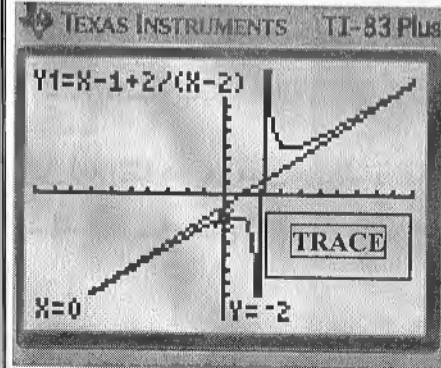
النقطة المتحركة على المنحني



وبما أن المنحني الممثل لهذه الدالة له مستقيم مقارب معادلته  $y = x - 1$  فحتى يكتمل

الرسم بظهوره في نفس المعلم ، نحجز العبارة  $x - 1$  في  $Y_2$  كما في الشكل الآتي :

وبالضغط على إحدى اللمستين **TRACE** أو **GRAPH** نحصل على الشاشتين الآتيتين :



وهذا هو المنحني الممثل للدالة  $f: x \mapsto x - 1 + \frac{2}{x - 2}$

أو نضغط على اللمسة فتظهر الشاشة :

• من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا :  $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$   
 2- الدالة  $- \frac{2}{x} : x \mapsto - \frac{2}{x}$  فردية على  $\mathbb{R}^*$  ، لأن :

- المجموعة  $\mathbb{R}^*$  متناظرة بالنسبة إلى 0.
- من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  لدينا :

$$f(-x) = - \frac{2}{-x} = - \left( - \frac{2}{x} \right) = -f(x)$$

3- الدالة  $\sqrt{x} : x \mapsto \sqrt{x}$  ليست زوجية وليست فردية على  $D = [0, +\infty[$   
 لأن  $D$  غير متناظرة بالنسبة إلى 0.

فمثلا  $3 \in D$  لكن  $-3 \notin D$  . ( مثال مضاد )

**الدالة الدورية :** نقول عن  $f$  إنها دورية على  $D$  إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم  $r$  بحيث من أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :  $(x+r) \in D$  و  $f(x+r) = f(x)$  .  
**ودور الدالة  $f$  :** هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما  $p$  بحيث :

من أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :  $f(x+p) = f(x)$  .

**فمثلا :** الدالتان  $x \mapsto \sin x$  و  $x \mapsto \cos x$  دوريتان لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$\sin(x+2\pi k) = \sin x \quad \text{و} \quad \cos(x+2\pi k) = \cos x \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}^*$$

ودورهما  $2\pi$  ( من أجل  $k=1$  ) .

**محور ومركز تناظر :**

• يقبل  $(C_f)$  المستقيم الذي معادلته  $x=a$  كمحور تناظر في معلم متعامد إذا كان

من أجل كل  $h$  بحيث  $a \pm h \in D_f$  ،  $f(a+h) = f(a-h)$  .

• يقبل  $(C_f)$  النقطة  $\Omega(a,b)$  كمركز تناظر في معلم متعامد إذا كان

$$\frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b \quad \text{حيث } a \pm h \in D_f$$

**عمليات على النهايات**  $l_1$  و  $l_2$  عدنان حقيقيان وهما - على الترتيب - نهايتا الدالتين  $f$  و  $g$

عندما يؤول  $x$  إلى نفس القيمة  $a$  ، ليكن  $\lambda$  عددا حقيقيا ثابتا .

نقبل أن : - نهاية  $(f+g)$  هي  $l_1 + l_2$  عندما يؤول  $x$  إلى القيمة  $a$  .

- نهاية  $(f \times g)$  هي  $l_1 \times l_2$  عندما يؤول  $x$  إلى القيمة  $a$  .

- نهاية  $(\lambda f)$  هي  $\lambda l_1$  عندما يؤول  $x$  إلى القيمة  $a$  .

- وإذا كان  $l_2 \neq 0$  فإن نهاية  $\left( \frac{f}{g} \right)$  هي  $\frac{l_1}{l_2}$  عندما يؤول  $x$  إلى القيمة  $a$  .

**بعض الأفكار لحساب النهايات** توجد حالات لا نستطيع فيها تطبيق القواعد السابقة مباشرة لحساب النهايات فنلجأ إلى طرائق غير مباشرة . وعدد هذه الحالات أربع ولسمى :

" حالات عدم التعيين " وهامي اختصارا :

(1) إذا كانت  $\lim f = +\infty$  وكانت  $\lim g = -\infty$  فإن  $\lim(f+g)$  لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي :  $\left( \begin{smallmatrix} +\infty \\ \end{smallmatrix} \right) + \left( \begin{smallmatrix} -\infty \\ \end{smallmatrix} \right)$

(2) إذا كانت  $\lim f = \pm\infty$  وكانت  $\lim g = 0$  فإن  $\lim(f \times g)$  لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي :  $\left( \begin{smallmatrix} \pm\infty \\ \end{smallmatrix} \right) \times \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ \end{smallmatrix} \right)$

(3) إذا كانت  $\lim f = \pm\infty$  وكانت  $\lim g = \pm\infty$  فإن  $\lim \left( \frac{f}{g} \right)$  لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي :  $\frac{\left( \begin{smallmatrix} \pm\infty \\ \end{smallmatrix} \right)}{\left( \begin{smallmatrix} \pm\infty \\ \end{smallmatrix} \right)}$

(4) إذا كانت  $\lim f = 0$  وكانت  $\lim g = 0$  فإن  $\lim \left( \frac{f}{g} \right)$  لا يمكن تعيينها

أي أننا لا نستطيع حساب الآتي :  $\frac{\left( \begin{smallmatrix} 0 \\ \end{smallmatrix} \right)}{\left( \begin{smallmatrix} 0 \\ \end{smallmatrix} \right)}$

وإذا صادفتنا الحالة (1) فمثلا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty - \infty$  ؟ نلجأ إلى الطريقة الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

وقد نستعمل المبرهنة الآتية :

إذا كانت عبارة  $f$  كثير حدود فإن نهاية  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية

الحد الأكبر درجة عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$  .

المثال السابق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

وإذا صادفتنا الحالة (3) فمثلا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$  ؟ نلجأ إلى الطريقة الآتية :



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

وقد نستعمل المبرهنة الآتية :

إذا كانت عبارة  $f$  كسرا ناطقا (كثير حدود على كثير حدود) فإن نهاية  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية حاصل قسمة الحد الأكبر درجة في البسط على الحد الأكبر درجة المقام عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

المثال السابق :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 - 2x - 3} = \frac{0}{0} \quad ? \text{ فمثلا : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 - 2x - 3} = \frac{0}{0}$$

وإذا صادفتنا الحالة (4) فمثلا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(-x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{-x-3} = \frac{1}{4}$$

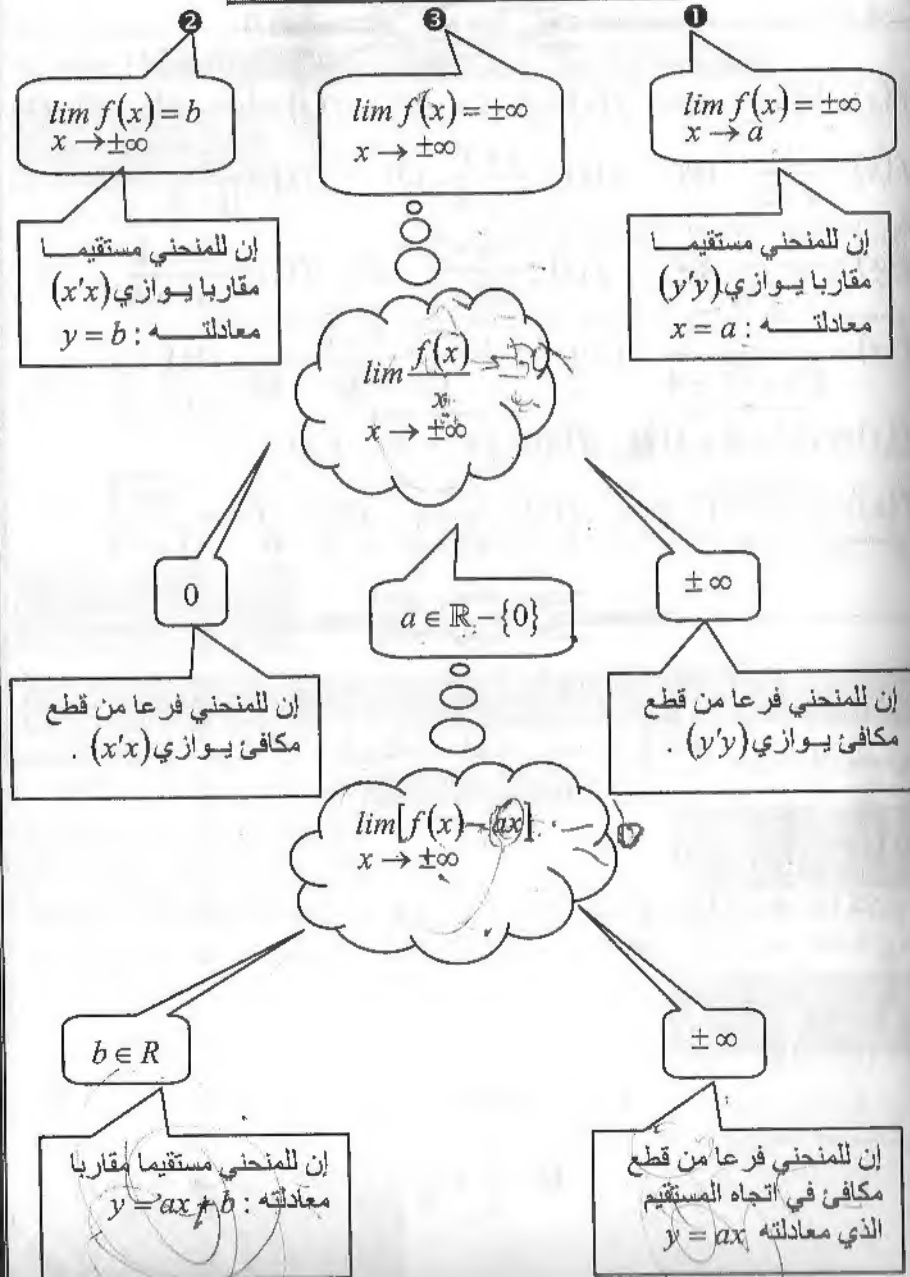
ملاحظة : كل كثير حدود ينعدم عند العدد الحقيقي  $a$  يحلل إلى جداء عوامل أحدها  $(x-a)$

### السلوك التقاربي لمنحن (المقاربات)

- إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  فإن المستقيم العمودي  $x = a$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$
- إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$  فإن المستقيم الأفقي  $y = b$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$
- إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  فإن المستقيم  $y = ax + b$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .
- عموما , إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$  فإن المنحنيين  $(C_f)$  ,  $(C_g)$  متقاربان

وملخص هذا وغيره تجده في المخطط الآتي :

### السلوك التقاربي للمنحنى أحوال ثلاث وهي :



التمارين المقترحة

التمرين 1

عين مجموع تعريف الدوال الآتية :

$$f(x) = |x| - 3x \dots (1) \quad f(x) = |3 - 2x| \dots (2) \quad f(x) = (x^2 - 4)(x - 5) \dots (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \dots (4) \quad f(x) = \frac{x+3}{3x-2} \dots (5) \quad f(x) = \frac{x}{|x-3|} \dots (6)$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x^2-9} \dots (7) \quad f(x) = \frac{2x+3}{x(x+1)} \dots (8) \quad f(x) = \frac{3x-2}{3x^2+5} \dots (9)$$

$$f(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2-4} \dots (10) \quad f(x) = \frac{2-x}{(2x+1)(x^2-4)} \dots (11)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \dots (12) \quad f(x) = \sqrt{x^2+16} \dots (13)$$

$$f(x) = \sqrt{-2x+1} \dots (14) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \dots (15) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$$

الحل

$$f(x) = |x| - 3x \dots (1) \quad f(x) = |3 - 2x| \dots (2) \quad f(x) = (x^2 - 4)(x - 5) \dots (3)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = \mathbb{R}$  ونكتب - أيضا -  $D = ]-\infty, +\infty[$

لأنها دوال كثيرة حدود.

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \dots (4)$$

الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان :  $x - 2 \neq 0$  ، أي أن الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان :

$x \neq 2$  . ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x+3}{3x-2} \dots (5)$$

الدالة معرفة إذا كان :  $3x - 2 \neq 0$  ، وهذا يكافئ :  $x \neq \frac{2}{3}$  .

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, \frac{2}{3}[ \cup ]\frac{2}{3}, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{|x-3|} \dots (6)$$

تكون الدالة معرفة عندما يكون  $|x-3| \neq 0$  . لكن  $|x-3| \neq 0$  يكافئ  $x - 3 \neq 0$

ويكافئ  $x \neq 3$  ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$

لاحظ الصيغ المختلفة - وهناك صيغ أخرى - لتحرير الإجابة

$$f(x) = \frac{3x-1}{x^2-9} \dots (7)$$

تكون الدالة معرفة عندما يكون  $x^2 - 9 \neq 0$  .

لكن  $x^2 - 9 \neq 0$  يكافئ  $x \neq 3$  و  $x \neq -3$

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 3[ \cup ]3, +\infty[$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x(x+1)} \dots (8)$$

تكون الدالة معرفة عندما يكون  $x(x+1) \neq 0$

لكن  $x(x+1) \neq 0$  يكافئ  $x \neq 0$  و  $x \neq -1$

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{3x-2}{3x^2+5} \dots (9)$$

تكون الدالة معرفة عندما يكون  $3x^2 + 5 \neq 0$  .

لكن  $3x^2 + 5 \neq 0$  محقق من أجل كل عدد حقيقي  $x$

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, +\infty[$  .

موجب أو  
معدوم

موجب  
تماما

$$f(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2-4} \dots (10)$$

تكون الدالة معرفة عندما يكون  $(2x+1)^2 - 4 \neq 0$  .

لكن  $x(x+1) \neq 0$  يكافئ  $(2x+1)^2 - 4 \neq 0$  وهذا يكافئ

$(2x-1)(2x+3) \neq 0$  ويكافئ - أيضا - :  $x \neq \frac{1}{2}$  و  $x \neq -\frac{3}{2}$

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$

$$f(x) = \frac{2-x}{(2x+1)(x^2-4)} \dots (11)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $(2x+1)(x^2-4) \neq 0$ .

لكن  $(2x+1)(x^2-4) \neq 0$  يكافئ  $x \neq -\frac{1}{2}$  و  $x \neq -2$  و  $x \neq +2$

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -2[ \cup ]-\frac{1}{2}, -2[ \cup ]-\frac{1}{2}, +2[ \cup ]+2, +\infty[$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \dots (12)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $x^2 - 4 \geq 0$ .

لكن  $x^2 - 4 \geq 0$  يكافئ  $(x-2)(x+2) \geq 0$

ولحل هذه المتراحة ندرس إشارة الجداء  $(x-2)(x+2)$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$+2$	$+\infty$
$x-2$	-	0	+	+
$x+2$	-	-	0	+
الجداء	-	0	-	+
المتراحة	✓		×	✓

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -2[ \cup ]+2, +\infty[$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} \dots (13)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $x^2 + 16 \geq 0$  ، وهذا محقق من أجل كل عدد حقيقي  $x$ .

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, +\infty[$

$$f(x) = \sqrt{-2x+1} \dots (14)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $-2x+1 \geq 0$ .

لكن  $-2x+1 \geq 0$  يكافئ  $x \leq \frac{1}{2}$  ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, \frac{1}{2}]$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \dots (15)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $x-1 \geq 0$  و  $\sqrt{x-1} \neq 0$

لكن  $(x-1 \geq 0 \text{ و } \sqrt{x-1} \neq 0)$  يكافئ  $x-1 > 0$  وهذا يكافئ  $x > 1$

ومجموعة التعريف هي :  $D = ]1, +\infty[$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} \dots (16)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $\frac{x+2}{x-4} \geq 0$  و  $x-4 \neq 0$

لكن  $\frac{x+2}{x-4} \geq 0$  و  $x-4 \neq 0$  يكافئ  $(x+2)(x-4) \geq 0$  و  $x \neq 4$

نفس طريقة الدالة (12) ومجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -2[ \cup ]+4, +\infty[$

### التمرين 2

عين مجموعة تعريف الدوال الآتية ثم أذكر فيما إذا كانت زوجية أو فردية :

$$f(x) = x|x| \dots (1) \quad f(x) = x^2|x| \dots (2) \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|} \dots (3)$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \dots (4) \quad f(x) = x + \frac{1}{x} \dots (5) \quad f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \dots (6)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \dots (7) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{4 - x^2}} \dots (8) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 16}{4 - x^2}} \dots (9)$$

### الحل

$$f(x) = x|x| \dots (1)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, +\infty[$

إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -f(x)$$

والدالة  $f$  فردية على  $D$ .

$$f(x) = x^2|x| \dots (2)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, +\infty[$

إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = (-x)^2|-x| = x^2|x| = f(x)$$

والدالة  $f$  زوجية على  $D$ .

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \dots (3)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, +\infty[$

إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$$

والدالة  $f$  فردية على  $D$ .

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \dots (4)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x)$$

والدالة  $f$  زوجية على  $D$ .

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \dots (5)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

والدالة  $f$  فردية على  $D$ .

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \dots (6)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +1[ \cup ]+1, +\infty[$ إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1} = f(x)$$

والدالة  $f$  زوجية على  $D$ .

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \dots (7)$$

مجموعة التعريف هي :  $D = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +2[ \cup ]+2, +\infty[$ إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = f(x)$$

والدالة  $f$  زوجية على  $D$ .

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{4 - x^2}} \dots (8)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $x^2 - 16 > 0$  و  $4 - x^2 > 0$  وهذا لا يتحقق لأن تقاطعمجال حل المتراجحتين مجموعة خالية ، وبالتالي :  $D = \emptyset$  ولا يمكن المتابعة.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 16}{4 - x^2}} \dots (9)$$

تكون الدالة  $f$  معرفة عندما يكون  $(x^2 - 16)(4 - x^2) \geq 0$  و  $4 - x^2 \neq 0$ وباستعمال الطريقة السابقة نجد أن مجموعة التعريف هي :  $D = ]-4, -2[ \cup ]2, +4[$ إن  $D$  متناظرة بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد  $x$  من  $D$  لدينا :

$$f(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2 - 16}{4 - (-x)^2}} = f(x)$$

والدالة  $f$  زوجية على  $D$ .

## التمرين 3

من أجل كل دالة  $f$ 

عين مجموعة تعريفها (اكتبها على شكل مجال).

- احسب نهايتها عندما يؤول  $x$  إلى كل طرف من طرفي (أو أطراف) مجال التعريف.- احسب نهايتها عندما يؤول  $x$  إلى  $(+1)$ .- احسب نهاية  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  عندما يؤول  $x$  إلى  $(+1)$ .

$$f(x) = 4 - 4x \dots (1) \quad f(x) = x^2 + 3x - 7 \dots (2) \quad f(x) = x^2 \dots (3)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \dots (4) \quad f(x) = \frac{2x + 3}{x - 4} \dots (5) \quad f(x) = \frac{1}{x} \dots (6)$$

## الحل

$$f(x) = 4 - 4x \dots (1)$$

(أ) الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, +\infty[$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 - 4(-\infty) = 4 + (+\infty) = +\infty$$

(ب)

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 - 4(+\infty) = 4 + (-\infty) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(ج)

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 4x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x - 1)}{x - 1} = -4$$

(د)

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \quad (د)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 4} \dots (5)$$

(أ) الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, 4[ \cup ]4, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad (ب)$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

$$x \xrightarrow{<} +4$$

$$x \xrightarrow{>} +4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{5}{3} \quad (\rightarrow)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x + 3}{x - 4} + \frac{5}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{11x - 11}{3(x - 1)(x - 4)} = -\frac{11}{9} \quad (د)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \dots (6)$$

(أ) الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad (ب)$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) = x^2 + 3x - 7 \dots (2) \quad ]-\infty, +\infty[ \text{ معرفة على } f$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5 \quad (د)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$f(x) = x^2 \dots (3)$$

(أ) الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \quad (د)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$f(x) = \sqrt{x} \dots (4)$$

(أ) الدالة  $f$  معرفة على  $[0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{0} = 0$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +1$$

$$x \rightarrow 1$$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, +2[ \cup ]2, +\infty[$  .  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0}$  ؟ لنسلك طريقا آخرى

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-2-x) = -4$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{1-x} \dots (3)$$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, +1[ \cup ]1, +\infty[$  .  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$  ؟ لنسلك طريقا آخرى

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} (2-x) = +1$$

$$f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} \dots (4)$$

الدالة  $f$  معرفة على  $[0, 9[ \cup ]9, +\infty[$  .  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \frac{0}{0}$  ؟ لنسلك طريقا آخرى

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \dots (5)$$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +1} f(x) = +2$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x} + \frac{3x+1}{x^2-1} \dots (6)$$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, +1[ \cup ]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+2) + x(3x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 2x - 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 2x - 2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(2x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(2x-1)}{x(x-1)} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +1$$

$$x \rightarrow 1$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x} = -1$$

(د)

التمرين 4

من أجل كل دالة  $f$ ، عين مجموعة تعريفها، احسب النهايات المطلوبة.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}, \quad \lim_{x \rightarrow +4} f? \dots (1) \quad f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}, \quad \lim_{x \rightarrow +2} f? \dots (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{1-x}, \quad \lim_{x \rightarrow +1} f? \dots (3) \quad f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}, \quad \lim_{x \rightarrow +9} f? \dots (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f?, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f?, \quad \lim_{x \rightarrow +1} f? \dots (5)$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x} + \frac{3x+1}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f? \dots (6)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow +1} f? \dots (7)$$

الحل

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} \dots (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +4} f(x) = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x-2} \dots (2)$$

الحل

$$f(x) = \frac{-3x+2}{x+2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = ? \dots (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x} = -3 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

$$f(x) = \frac{3x-|x-4|}{x+5} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +4 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = ? \dots (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - (-x+4)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-4}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - (x-4)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+4}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = +2$$

التمرين 7

عين نهايات الدالة  $f$  المعرفة على  $I$  في الحالات الآتية :

$$I = ]0, +\infty[ \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^3} \quad \text{وفي } 0 \quad (1)$$

$$I = ]-\infty, 0[ \quad , \quad f(x) = -\frac{2}{3x^2} \quad \text{وفي } 0 \quad (2)$$

$$I = ]-\infty, 0[ \quad , \quad f(x) = -\frac{3}{x} \quad \text{وفي } -\infty \quad (3)$$

$$I = ]-2, +\infty[ \quad , \quad f(x) = \frac{2x}{x+2} \quad \text{وفي } +\infty \quad (4)$$

$$I = ]-\infty, -1[ \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x+1} \quad \text{وفي } -\infty \quad (5)$$

$$I = ]2, +\infty[ \quad , \quad f(x) = \frac{5x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 8x + 4} \quad \text{وفي } +\infty \quad (6)$$

$$I = ]-1, +\infty[ \quad , \quad f(x) = \frac{1-2x}{(x+1)^2} \quad \text{وفي } +\infty \quad (7)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \dots (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = 0$$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty, 0] \cup \{-1\} \cup ]+2, +\infty[$

التمرين 5

تحقق في كل حالة أن الدالة  $f$  تؤول إلى المالانهاية ( حدد :  $-\infty$  أو  $+\infty$  ).

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{و } x \text{ يؤول إلى } 0 \dots (1) \quad f(x) = \frac{x-2}{|x-1|} \quad \text{و } x \text{ يؤول إلى } +1 \dots (2)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \quad \text{و } x \text{ يؤول إلى } -1 \dots (3)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \dots (1) \quad (\text{لأن المقام موجب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad , \quad f(x) = \frac{x-2}{|x-1|} \dots (2) \quad (\text{لأن المقام موجب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{(x+1)(2x+1)} = \frac{3}{(0^-)(-1)} = +\infty \quad , \quad f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \dots (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{(x+1)(2x+1)} = \frac{3}{(0^+)(-1)} = -\infty \quad (\text{لأن إشارة المقام متغيرة})$$

التمرين 6

احسب نهايات الدالة  $f$  و تحقق من النهايات المعطاة .

$$f(x) = \frac{-3x+2}{x+2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -3 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = ? \dots (1)$$

$$f(x) = \frac{3x-|x-4|}{x+5} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +4 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = ? \dots (2)$$

التمرين 8

عين نهايات الدالة  $f$  عند أطراف المجال  $I$  في الحالات الآتية :

$$I = ]-\infty, \frac{3}{2}[ , f(x) = -\frac{1}{-2x+3} \quad (2) \quad I = ]3, +\infty[ , f(x) = \frac{1}{x-3} \quad (1)$$

$$I = ]-\infty, \frac{1}{2}[ , f(x) = \frac{1+x}{2x-1} \quad (4) \quad I = ]3, +\infty[ , f(x) = \frac{3}{4-2x} \quad (3)$$

$$I = ]-2, 1[ , f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^2+x-2} \quad (6) \quad I = ]1, +\infty[ , f(x) = \frac{3x+1}{3x^2+x-3} \quad (5)$$

التمرين 9

عين النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} \quad (4) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+\frac{1}{x}} \quad (3) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} \quad (2) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3 \quad (6) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} \quad (5)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = \sqrt{2} \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+3} = 2 \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+\frac{1}{x}} = \infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right) = 0 + (+\infty) = +\infty \quad \text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+\frac{1}{x}} \quad (3)$$

الحل

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{+1}{0^+} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{+1}{0^-} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+1}{+\infty} = 0$$

$$f(x) = -\frac{2}{3x^2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-2}{3(+\infty)^2} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$$f(x) = -\frac{3}{x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-3}{-\infty} = 0$$

$$f(x) = \frac{2x}{x+2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x+1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{3x^2} = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{5x^2+2x-3}{3x^2-8x+4} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$f(x) = \frac{1-2x}{(v+1)^2} \quad (7)$$



التمرين 11

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]3, +\infty[$  كما يلي :

① برهن أنه من أجل كل  $x > 3$  ،  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$  ،

② استنتج نهايات  $f$  عند 3 و عند  $+\infty$  .

الحل

① من أجل  $x > 0$  لدينا  $f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

② استنتج نهايات  $f$  عند 3 و عند  $+\infty$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{+\infty} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

التمرين 12

باستعمال نظريات المقارنة ( الحصر ) عين النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x + 4 + \frac{\sin x}{x} \right) \quad (3) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 1} \quad (2) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x-1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \cos x) \quad (4)$$

الحل

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{+1}{x+1} \quad \text{بما أن } -1 \leq \cos x \leq +1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$

وهذا بقسمة الأطراف على العدد الموجب تماما  $x+1$  على اعتبار أن  $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} = \frac{\sqrt{4}}{(0^+)^2} = \frac{\sqrt{4}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} \quad (5)$$

فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 4 + \frac{1}{x} \right) = +\infty - 4 + \frac{1}{+\infty} = +\infty$  بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3 \quad (6)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

التمرين 10

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  كما يلي :

① ادرس نهاية  $f$  عند 0 .

② برهن أنه من أجل كل  $x > 0$  ،  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$  ثم استنتج نهاية  $f$  عند  $+\infty$  .

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} = \frac{\sqrt{4}}{(0^+)^2} = \frac{\sqrt{4}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 4 + \frac{1}{x} \right) = +\infty - 4 + \frac{1}{+\infty} = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3 = (+\infty)^3 = +\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 4 + \frac{1}{x} \right)^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

التمرين 10

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  :  
 ① ادرس نهاية  $f$  عند 0 .

② برهن أنه من أجل كل  $x > 0$  ،  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$  ثم استنتج نهاية  $f$  عند  $+\infty$  .

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 1 \quad ①$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad \text{من أجل } x > 0 \text{ لدينا} \quad ②$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

بضرب العبارة في مرافقها وقسمتها عليه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

استنتج نهاية  $f$  عند  $+\infty$  :

التمرين 11

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[3, +\infty[$  كما يلي :  
 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

① برهن أنه من أجل كل  $x > 3$  ،  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$  .  
 ② استنتج نهايات  $f$  عند 3 و عند  $+\infty$  .

الحل

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \quad \text{من أجل } x > 0 \text{ لدينا}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

② استنتج نهايات  $f$  عند 3 و عند  $+\infty$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{+\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

التمرين 12

باستعمال نظريات المقارنة ( الحصر ) عين النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x + 4 + \frac{\sin x}{x} \right) \quad (3), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 1} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x-1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \cos x) \quad (4)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x-1} = 0 \quad \text{بما أن } -1 \leq \cos x \leq +1 \text{ فإن } \frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{+1}{x+1}$$

وهذا بقسمة الأطراف على العدد الموجب تماما  $x+1$  على اعتبار أن  $x > 0$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} \leq 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+1}{x+1} :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0 \text{ والخلاصة}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1} \text{ بما أن } -1 \leq \sin 2x \leq +1 \text{ فإن } \frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\sin 2x}{x^2+1} \leq \frac{+1}{x^2+1} \text{ (2)}$$

وذلك بقسمة الأطراف على العدد الموجب تماما  $x^2+1$  وبالتالي :

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1} \leq 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2+1} \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1} \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1} = 0 \text{ الخلاصة}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{\sin x}{x} \right) \text{ بما أن } -1 \leq \sin x \leq +1 \text{ فإن } \frac{+1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x} \text{ (3)}$$

وهذا بقسمة الأطراف على العدد السالب تماما  $x$  وبإضافة  $3x+4$  إلى الأطراف نجد :

$$3x+4 + \frac{+1}{x} \leq 3x+4 + \frac{\sin x}{x} \leq 3x+4 + \frac{-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{+1}{x} \right) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{\sin x}{x} \right) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{-1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{+1}{x} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{-1}{x} \right) = -\infty \text{ بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x+4 + \frac{\sin x}{x} \right) = -\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \cos x) \text{ بإضافة } x^2 \text{ إلى } -1 \leq \cos x \leq +1 \text{ نجد : (4)}$$

$$x^2 - 1 \leq x^2 + \cos x \leq x^2 + 1 \text{ وبالتالي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \cos x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \text{ وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \cos x) = +\infty \text{ فإن}$$

## التمرين 13

برهن أن المنحني - الممثل للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $I$  - يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات الآتية :

$$I = ]-\infty, 0[ , f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \quad (2) \quad I = ]2, +\infty[ , f(x) = \frac{1}{x-2} \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} , f(x) = \frac{-x+1}{x^2+1} \quad (4) \quad I = ]1, +\infty[ , f(x) = \frac{2x}{1-x} \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} , f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \quad (6) \quad I = ]-\infty, -2[ , f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+x-2} \quad (5)$$

## الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \text{ بما أن : (1)}$$

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته  $x=2$

$$\text{وبما أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ فإن}$$

المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y=0$  (حامل محاور الفواصل)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right) = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 \text{ بما أن : (2)}$$

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y=2$

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y = 0$  (حامل محور الفواصل)

التمرين 14

برهن أن المستقيم  $D$  مقارب للمنحني  $C_f$  ثم ادرس الوضعية النسبية لـ  $C_f$  و  $D$  على المجال  $I$  في الحالات الآتية:

$$D: y = x, \quad I = ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad (1)$$

$$D: y = x - 1, \quad I = ]-\infty, -1[, \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (2)$$

$$D: y = x + 4, \quad I = ]2, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2} \quad (3)$$

$$D: y = -3x + 7, \quad I = ]-\infty, -1[, \quad f(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 5}{x + 1} \quad (4)$$

$$D: y = x + 2, \quad I = ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} \quad (5)$$

الحل

$$(1) \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \text{ فإن } D \text{ مستقيم مقارب للمنحني } C_f$$

وإذا كان  $x > 0$  فإن  $\frac{-1}{x} < 0$  وهذا يعني أن  $C_f$  تحت  $D$ .

$$(2) \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{x + 1} - (x - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \text{ فإن } D \text{ مستقيم مقارب للمنحني } C_f$$

وإذا كان  $x < -1$  فإن  $\frac{1}{x + 1} < 0$  وهذا يعني أن  $C_f$  تحت  $D$ .

$$(3) \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2} - (x + 4) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11}{x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right) = 2 - \frac{1}{0^+} = 2 - (+\infty) = -\infty$$

وبما أن :

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1 - x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

(3) بما أن

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

وبما أن

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y = -2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

(4) بما أن

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y = 0$  (حامل محور الفواصل)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

وبما أن

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y = 0$  (حامل محور الفواصل)

ملاحظة : ويمكن جمع الدراستين في دراسة واحدة كما في (6) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(5) بما أن

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y = 1$  ، وبما أن

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} - \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{8}{(0^-)(-3)} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته  $x = -2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{2}{x} = 0$$

(6) بما أن



فإن  $D$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$

وإذا كان  $x > 2$  فإن  $\frac{11}{x-2} > 0$  وهذا يعني أن  $C_f$  فوق  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-3x^2 + 4x - 5}{x+1} - (-3x+7) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12}{x+1} = 0 \quad (4) \text{ بما أن}$$

فإن  $D$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$

وإذا كان  $x < -1$  فإن  $\frac{-12}{x+1} > 0$  وهذا يعني أن  $C_f$  فوق  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} - (x+2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \quad (5) \text{ بما أن}$$

فإن  $D$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$

وإذا كان  $x > 0$  فإن  $\frac{-1}{x^2} < 0$  وهذا يعني أن  $C_f$  تحت  $D$ .

### التمرين 15

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $I = ]1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x-1}$

① برهن أنه من أجل كل  $x$  من  $I$  ،  $f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-1}$ .

② برهن أن المستقيم  $D$  ذا المعادلة  $y = x + 4$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$ .

③ ادرس الوضعية النسبية لـ  $C_f$  و  $D$  على  $I$ .

④ هل يقبل  $C_f$  مقاربا آخر؟ إذا كان الجواب : نعم ، عين معادلته.

### الحل

$$x + 4 + \frac{5}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1) + 5}{x-1} = \frac{x^2 + 3x + 1}{x-1} \quad (1) \text{ لدينا :}$$

$$\text{ومنه : } f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x-1} = 0 \quad (2) \text{ بما أن :}$$

فإن المستقيم الذي معادلته :  $y = x + 4$  مقارب مائل للمنحني  $C_f$ .

$$(3) \text{ ليكن الفرق : } f(x) - (x+4) = \frac{5}{x-1}$$

من أجل  $x$  من  $I$  :  $\frac{5}{x-1} > 0$  وبالتالي يقع  $C_f$  فوق  $D$

$$(4) \text{ وبما أن } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

فإن : المستقيم الذي معادلته :  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحني  $C_f$ .

### التمرين 16

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$

① برهن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) = x + 2 + \frac{8x}{x^2 + 1}$ .

② برهن أن المنحني  $C_f$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته له .

③ ادرس الوضعية النسبية لـ  $C_f$  و  $D$  على  $\mathbb{R}$ .

### الحل

$$(1) \text{ لدينا : } x + 2 + \frac{8x}{x^2 + 1} = \frac{(x+2)(x^2 + 1) + 8x}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$$

$$\text{ومنه : } f(x) = x + 2 + \frac{8x}{x^2 + 1}$$

$$(2) \text{ بما أن : } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{8x}{x^2 + 1} = 0$$

فإن المستقيم الذي معادلته :  $y = x + 2$  مقارب مائل للمنحني  $C_f$ .

$$(3) \text{ ليكن الفرق : } f(x) - (x+2) = \frac{8x}{x^2 + 1}$$

إن إشارة هذا الفرق من إشارة  $8x$ ، وملخص إشارة هذا الفرق في الجدول الآتي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$8x$		$-$	$+$
الوضعية	المنحني $C_f$ تحت المقارب المائل		المنحني $C_f$ فوق المقارب المائل

## التمرين 17

لتكن  $f$  الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = a + \frac{1}{(x-b)^2}$

عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى يتحقق الآتي :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$

## الحل

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-b)^2} = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  وبالتالي :  $a = -5$

وإذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-b)^2} = +\infty$  (لأن  $a$  ثابت)

وحتى يتحقق هذا يجب تأخذ  $b$  القيمة 3. وبالتالي :  $b = 3$

## التمرين 18

لتكن  $f$  الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$

عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c, d$  إذا علمت أن :

• المستقيم  $D$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب مائل للمنحني في  $+\infty$ .

• المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحني.

• يشمل المنحني النقطة التي فاصلتها 0 وترتيبها 2.

## الحل

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x-d} = 0$

فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = ax + b$  مقارب مائل للمنحني في  $+\infty$

وبالتالي :  $a = 2$  و  $b = 1$  ويكون لدينا  $f(x) = 2x + 1 + \frac{c}{x-d}$

• وبما أن  $\lim_{x \rightarrow d} |f(x)| = +\infty$  فإن المستقيم ذا المعادلة  $x = d$  مقارب عمودي

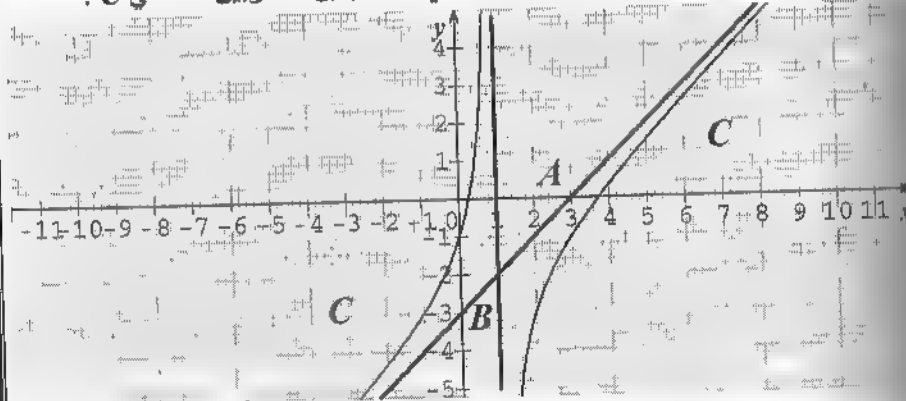
للمنحني وبالتالي  $d = 1$  ويكون لدينا  $f(x) = 2x + 1 + \frac{c}{x-1}$

• بما أن المنحني يشمل النقطة التي فاصلتها 0 وترتيبها 2، فإن  $f(0) = 2$  أي أن

$2 = 2(0) + 1 + \frac{c}{0-1}$  وبالتالي  $c = -1$  ويكون لدينا  $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x-1}$

## التمرين 19

انطلاقاً من المنحني المرسوم أدناه، عين معادلتَي المستقيمين المقاربين للمنحني  $C$ .



## الحل

• معادلة المستقيم المقارب العمودي هي :  $x = 1$ .

• لاحظ من الشكل أن المستقيم المقارب المائل يشمل النقطتين :  $A(3, 0)$  و  $B(0, -3)$

و بما أن معادلة هذا المستقيم من الشكل  $y = ax + b$  فإن

وبالتالي  $a = 1$  و  $b = -3$  وتكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي :  $y = x - 3$

الاشتقاقية :

العدد المشتق : العدد المشتق للدالة  $f$  عند قيمة  $x_0$  هو النهاية المنتهية للدالة

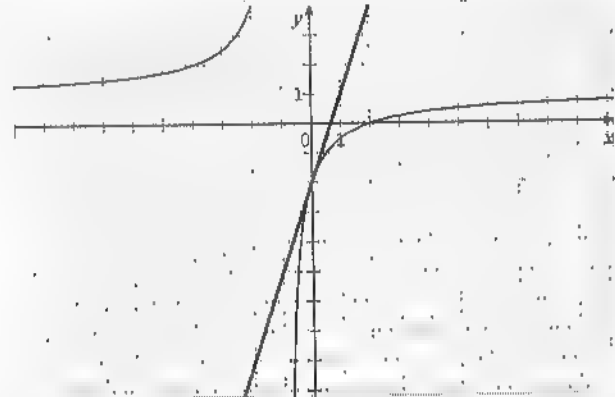
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

يمكن أن نوجز هذا فيما يلي :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$ ونقول - عندئذ - : إن  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$ . ونرمز إلى العدد المشتق بالرمز  $f'(x_0)$ فمثلا : الدالة  $f$  المعرفة على  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  لندرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 0.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h-2}{h+1} - (-2)}{h} = \frac{3h}{h(h+1)} = \frac{3}{h+1}$$

لنحسب :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h+1} = 3$$

ومنه :  $3$  ، إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0و  $f'(0) = 3$  وبالتالي :  $f'(0) = 3$  هو العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 وبالتالي : رمز آخر <sup>(1)</sup> للعدد المشتق عند  $x_0$ وهو حاصل قسمة التفاضل  $df$  على التفاضل  $dx$  عند القيمة  $x_0$  :  $f'(x_0) = \frac{df}{dx}$  تفسير هندسي للعدد المشتق : إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مماسا في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  معامل توجيهه  $f'(x_0)$ .نتيجة : معادلة هذا المماس هي :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ فمثلا : بما أن الدالة  $f$  المعرفة على  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = 3$  فإن المنحني الممثل للدالة  $f$  يقبل مماسا في النقطة  $(0, -2)$  معامل توجيهه  $(+3)$ .ومعادلة هذا المماس هي :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ 1- إن الرمز  $f'(x_0)$  للرياضي والفيزيائي والفيلسوف البريطاني (Newton (1642-1727)والرمز  $\frac{df}{dx}$  للعالم والفيلسوف الألماني Leibniz (1646-1716)لكن  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  يكافئ  $y = (3)(x - 0) + (-2)$  ومنه  $y = 3x - 2$ التمثيل البياني : لنرسم المنحني الممثل للدالة  $x \rightarrow 3x - 2$ 

نتائج :

$f'(x_0) = a$ فإنه يكون	يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$	إذا كان المماس ذو معامل التوجيه : $f'(x_0)$
$f'(x_0) = 0$ فإنه يكون	يوازي محور الفواصل ( أفقيا )	
$f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ فإنه يكون	يعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$	
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm \infty$	يعامد محور الترتيب ( عموديا )	

مشتقة دالة :  $f$  دالة قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من المجال  $I$  حيث  $I \subset D$ مشتقة الدالة  $f$  على  $I$  هي الدالة المعرفة على  $I$  كما يلي :  $x \rightarrow f'(x)$ حيث  $f'(x)$  هو العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x$ 

ولد اسحاق نيوتن Sir Isaac Newton سنة 1642 بإنجلترا . كان فيلسوفا رياضياتيا وفيزيائيا . قدم نيوتن ورقة علمية وصف فيها قوة الجاذبية الكونية ومهد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسيكية عن طريق قوانين الحركة . يشارك نيوتن ليبينز الحق في تطوير علم الحساب التفاضلي والمتفرع من الرياضيات ...

جدول بمشتقات بعض الدوال المألوفة:

عبارة الدالة $f$ هي	الدالة $f$ معرفة على	وتقبل $f$ الاشتقاق على	ومشتقة الدالة $f$ هي
$a$ (الدالة الثابتة)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$0$ (الدالة المعدومة)
$f(x) = -5$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$x^n / n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$

عمليات على الدوال المشتقة:  $f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$   
 القاعدة الأولى: (مشتقة مجموع): الدالة  $(f+g)$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) : I \text{ من } x \text{ عدد كل عدد } x \text{ من } I$$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 + x - 3$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:  $f'(x) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$

القاعدة الثانية: (مشتقة جداء): الدالة  $(f \times g)$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا:

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) : I \text{ من } x \text{ عدد كل عدد } x \text{ من } I$$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 + 1)$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:  $f'(x) = (2x + 1)(x^2 + 1) + (x^2 + x - 3)(2x)$

القاعدة الثالثة: الدالة  $(\lambda f)$  - حيث  $\lambda$  عدد حقيقي - قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا:

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) : I \text{ من } x \text{ عدد كل عدد } x \text{ من } I$$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = -2x^2$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:  $f'(x) = (-2)(2x) = -4x$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:  $f'(x) = (-2)(2x) + (4)(1) + 0 = -4x + 4$

نتيجة:  $g$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ ، ولا تتعدم عليه.

$f$  دالة بحيث من أجل كل  $x$  من  $I$   $f(x) \times g(x) = 1$  لاحظ أن  $f' = \frac{1}{g}$

إن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $D$ :

$$f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) = 0 \text{ وتعوويض } f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) = 0 : f'(x) \times g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$$

وبقسمة الطرفين على  $g(x)$  نحصل على:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ القاعدة الرابعة:}$$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}^*$  هي:  $f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$

القاعدة الخامسة: (مشتقة حاصل قسمة): الدالة  $g$  لا تتعدم على  $I$

الدالة  $\left(\frac{f}{g}\right)$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2} : I \text{ من } x \text{ عدد كل عدد } x \text{ من } I$$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:

$$f'(x) = \frac{(4x - 3)(x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

القاعدة السادسة: (مشتقة دالة مركبة من دالتين)

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \times g'(x) : I \text{ من } x \text{ عدد كل عدد } x \text{ من } I$$

فمثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \sin(ax + b)$

نلاحظ أن  $f$  مركبة من الدالتين  $x \mapsto \sin x$  و  $x \mapsto ax + b$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:  $f'(x) = \cos(ax + b) \times a = a \cos(ax + b)$

ومثلا: الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \cos(ax + b)$

نلاحظ أن  $f$  مركبة من الدالتين  $x \mapsto \cos x$  و  $x \mapsto ax + b$

مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي:  $f'(x) = -\sin(ax + b) \times a = -a \sin(ax + b)$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{19h}{h(3x_0 + 3h + 1)(3x_0 + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{19}{(3x_0 + 3h + 1)(3x_0 + 1)} = \frac{19}{(3x_0 + 1)^2}$$

$x_0 \in \mathbb{R} \quad \cdot \quad x_0 = -\frac{1}{2} \quad \cdot \quad x_0 = +4$  من أجل  $f(x) = -\sqrt{3x+2} \dots (1)$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3h+14} - (-\sqrt{14})}{h} = \frac{0}{0} ?$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\sqrt{3h+14} + \sqrt{14})(-\sqrt{3h+14} - \sqrt{14})}{h(-\sqrt{3h+14} - \sqrt{14})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(-\sqrt{3h+14} - \sqrt{14})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{-\sqrt{3h+14} - \sqrt{14}} = -\frac{3}{2\sqrt{14}}$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-\frac{1}{2}+h) - f(-\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} - (-\sqrt{\frac{1}{2}})}{h} = \frac{0}{0} ?$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} - (-\sqrt{\frac{1}{2}})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})}{h(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{-\sqrt{3h+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x_0+h-3} - \left(\frac{2}{x_0-3}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(x_0+h-3)(x_0-3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(x_0+h-3)(x_0-3)} = \frac{-2}{(x_0-3)^2}$$

$x_0 \in \mathbb{R} \quad \cdot \quad x_0 = +1 \quad \cdot \quad x_0 = -2$  من أجل  $f(x) = \frac{4x-5}{3x+1} \dots (3)$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4h-13}{3h-5} - \left(\frac{13}{5}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-19h}{5h(3h-5)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-19}{5(3h-5)} = \frac{19}{25}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4h-1}{3h+4} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{19h}{4h(3h+4)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{19}{4(3h+4)} = \frac{19}{16}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4x_0+4h-5}{3x_0+3h+1} - \left(\frac{4x_0-5}{3x_0+1}\right)}{h}$$

$$f(x) = (2x-3)(-3x^2+4x-7) \dots (6)$$

$D=I=R$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (2)(-3x^2+4x-7) + (2x-3)(-6x+4) = -18x^2 + 34x - 26$$

$$f(x) = (2x^2+3)(-5x^2+6x+1) \dots (7)$$

$D=I=R$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (4x)(-5x^2+6x+1) + (2x^2+3)(-10x+6) = -40x^3 + 36x^2 - 26x + 18$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 1\right)(3x^2 + 7x) \dots (8)$$

$D=I=R$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (x-4)(3x^2+7x) + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 1\right)(6x+7) = 6x^3 - \frac{51}{2}x - 50x + 7$$

$$f(x) = (-5x^2+6x+1)^2 = (-5x^2+6x+1)(-5x^2+6x+1) \dots (9)$$

$D=I=R$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (-10x+6)(-5x^2+6x+1) + (-5x^2+6x+1)(-10x+6) = 2(-5x^2+6x+1)(-10x+6)$$

يمكن استنتاج قاعدة جديدة لحساب مشتقة الدالة  $f^n$

$$[f^n(x)]' = n \times f^{n-1}(x) \times f'(x)$$

$$f(x) = (4x-9)^2 \dots (10)$$

$D=I=R$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = 2(4x-9)(4) = 8(4x-9) = 32x - 72$$

$$f(x) = (2x+1)^2(x+3) = (4x^2+4x+1)(x+3) \dots (11)$$

$D=I=R$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (8x+4)(x+3) + (4x^2+4x+1)(1) = 12x^2 + 32x + 13$$

**ملاحظة :** من أجل الدوال الناطقة (كثير حدود على كثير حدود)  $D=I$

$$f(x) = -\frac{4}{x} = (-4)\left(\frac{1}{x}\right) \dots (13)$$

$$(\lambda \times f)' = \lambda \times f'$$

$D=I=R^*$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (-4)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2} \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{3x-5} = (2)\left(\frac{1}{3x-5}\right) \dots (14)$$

$D=I=R - \left\{\frac{5}{3}\right\}$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = (+2)\left(\frac{-3}{(3x-5)^2}\right) = -\frac{6}{(3x-5)^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f(x) = \frac{4x+1}{x-2} \dots (15)$$

$D=I=R - \{+2\}$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = \frac{(4)(x-2) - (1)(4x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-9}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{4x-3} \dots (16)$$

$D=I=R - \left\{\frac{3}{4}\right\}$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = \frac{(+1)(4x-3) - (x+2)(4)}{(4x-3)^2} = \frac{-11}{(4x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{3-x} - \frac{x}{5-2x} \dots (17)$$

$D=I=R - \left\{+\frac{5}{2}, +3\right\}$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = \frac{(+2)(3-x) - (-1)(2x+1)}{(3-x)^2} - \frac{(+1)(5-2x) - (-2)(x)}{(5-2x)^2} = \frac{7}{(3-x)^2} - \frac{5}{(5-2x)^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 \dots (19)$$

$D=I=R - \{+2\}$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

$$f'(x) = 2\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\left(\frac{+1}{(x-2)^2}\right) = \frac{2x-6}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \left(\frac{2x-3}{1-x}\right)^2 \dots (20)$$

$D=I=R - \{+1\}$  ومن أجل كل  $x$  من  $I$

من أجل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  ،  $f'(x) = \frac{+5}{(1-2x)^2}$  ، ومنه :  $f'(+1) = +5$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+3}, x_0 = +1 \dots (6)$$

من أجل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-3\}$  ،  $f'(x) = \frac{+11}{(x+3)^2}$  ، ومنه :  $f'(+1) = \frac{11}{16}$

التمرين 23

عين فواصل نقط المنحني الممثل لكل دالة  $f$  من الدوال الآتية التي يقبل فيها المماس معامل توجيه  $m$ .

$$f(x) = x^2 + 3x - 4, m = \sqrt{3} \dots (1) \quad f(x) = -\frac{2}{x}, m = \frac{3}{2} \dots (2)$$

$$f(x) = \frac{5}{x-3}, m = 2 \dots (3) \quad f(x) = \frac{2x+3}{x-2}, m = -1 \dots (4)$$

الحل

$$f(x) = x^2 + 3x - 4, m = \sqrt{3} \dots (1)$$

من أجل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = 2x + 3$  . وفواصل النقط هي حلول المعادلة  $f'(x) = \sqrt{3}$

$$\text{أي } f'(x) = \sqrt{3} \text{ يكافئ } 2x + 3 = \sqrt{3} \text{ ومنه } x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$f(x) = -\frac{2}{x}, m = \frac{3}{2} \dots (2)$$

من أجل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  ،  $f'(x) = \frac{2}{x^2}$  . وفواصل النقط هي حلول المعادلة  $f'(x) = \frac{3}{2}$

$$\text{أي } f'(x) = \frac{3}{2} \text{ يكافئ } \frac{2}{x^2} = \frac{3}{2} \text{ ومنه } 3x^2 - 4 = 0 \text{ وبالتالي}$$

$$x = +\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ أو } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f(x) = \frac{5}{x-3}, m = 2 \dots (3)$$

$$f'(x) = 2 \left( \frac{2x-3}{1-x} \right) \left( \frac{-1}{(1-x)^2} \right) = \frac{-4x+6}{(1-x)^3}$$

التمرين 22

احسب معامل توجيه المماس للمنحني الممثل لكل دالة  $f$  من الدوال الآتية في النقطة التي فاصلتها  $x_0$ .

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2, x_0 = -2 \dots (1) \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 4, x_0 = -1 \dots (2)$$

$$f(x) = 2x^2 - 3|x+2| - 4, x_0 = -3 \dots (3) \quad f(x) = \frac{5}{x+3}, x_0 = -2 \dots (4)$$

$$f(x) = \frac{x+2}{1-2x}, x_0 = +1 \dots (5) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x+3}, x_0 = +1 \dots (6)$$

الحل

تذكير: إن معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  هو  $f'(x_0)$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2, x_0 = -2 \dots (1)$$

$$\text{من أجل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{4}{3}x \quad \text{ومنه : } f'(-2) = \frac{8}{3}$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 4, x_0 = -1 \dots (2)$$

$$\text{من أجل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad f'(x) = 4x - 5 \quad \text{ومنه : } f'(-1) = -9$$

$$f(x) = 2x^2 - 3|x+2| - 4, x_0 = -3 \dots (3)$$

$$\text{من أجل } x \text{ من } ]-\infty, -2] \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 2 \quad \text{ومنه : } f'(x) = 4x + 3$$

$$\text{وبالتالي : } f'(-3) = -9$$

$$f(x) = \frac{5}{x+3}, x_0 = -2 \dots (4)$$

$$\text{من أجل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-3\} \quad f'(x) = \frac{-5}{(x+3)^2} \quad \text{ومنه : } f'(-2) = -5$$

$$f(x) = \frac{x+2}{1-2x}, x_0 = +1 \dots (5)$$

فاصلتها  $x_0$ . ثم اكتب معادلة له دون رسم المنحني الممثل للدالة  $f$

$$f(x) = x^2 + x - 2, \quad x_0 = -1 \dots (1) \quad f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5}, \quad x_0 = \frac{1}{3} \dots (2)$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x_0 = +1 \dots (3) \quad f(x) = \frac{3x+2}{1-2x}, \quad x_0 = -2 \dots (4)$$

$$f(x) = \frac{5x-2}{3x+4}, \quad x_0 = \frac{2}{5} \dots (5) \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = -2 \dots (6)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+1}, \quad x_0 = -1 \dots (7) \quad f(x) = 2x^4 - 3x^2, \quad x_0 = -1 \dots (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}, \quad x_0 = -1 \dots (9) \quad f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-2)^2}, \quad x_0 = -2 \dots (10)$$

$$f(x) = -x^2 + 2|x-3|, \quad x_0 = +3 \dots (11)$$

$$f(x) = (x-3)x + 1, \quad x_0 = -2 \dots (12) \quad f(x) = \frac{2x+1}{|x-3|}, \quad x_0 = -1 \dots (13)$$

$$f(x) = \left| \frac{3x+2}{x-1} \right|, \quad x_0 = -\frac{2}{3} \dots (14)$$

الحل

تذكير (1): المماس ذو معامل التوجيه  $m$  في النقطة  $A(x_0, y_0)$  هو المستقيم المار بالنقطتين  $A$  و  $P$  حيث  $\overrightarrow{AH} = k \overrightarrow{I}$  و  $\overrightarrow{HP} = km \overrightarrow{J}$  (عدد ناطق  $k$ )

تذكير (2):  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  هي معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  من المنحني الممثل للدالة  $f$ .

$$f(x) = x^2 + x - 2, \quad x_0 = -1 \dots (1)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f'(x) = 2x + 1$  ومنه  $f'(-1) = -1$  و  $f(-1) = -2$

لنرسم المماس ذا معامل التوجيه (-1) المار بالنقطتين  $A(-1, -2)$  و  $P$

حيث  $\overrightarrow{AH} = (-2) \overrightarrow{I}$  و  $\overrightarrow{HP} = (-2) \overrightarrow{J}$  (ناخذ، مثلا،  $k = -2$ )

طرف موجب تماما  
وآخر سالب تماما

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2} \quad \mathbb{R} - \{+3\} \text{ من أجل } x$$

وفواصل النقط هي حلول المعادلة  $f'(x) = +2$

$$\text{لكن } f'(x) = +2 \text{ يكافئ } \frac{-5}{(x-3)^2} = +2 \text{ وهذا مستحيل وبالتالي لا توجد نقط}$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}, \quad m = -1 \dots (4)$$

$$f'(x) = \frac{-7}{(x-2)^2} \quad \mathbb{R} - \{+2\} \text{ من أجل } x$$

وفواصل النقط هي حلول المعادلة  $f'(x) = -1$

$$\text{لكن } f'(x) = -1 \text{ يكافئ } \frac{-7}{(x-2)^2} = -1 \text{ ومنه } (x-2)^2 = 7 \text{ وبالتالي:}$$

$$x = 2 + \sqrt{7} \text{ أو } x = 2 - \sqrt{7}$$

التمرين 24

عين  $m$  حتى يكون للمنحني الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{mx-3}{x+2} \text{ مماس في النقطة التي فاصلتها } (+1) \text{ معامل توجيهه } +\frac{1}{2}.$$

الحل

هذه العبارة: "مماس في النقطة التي فاصلتها (+1) معامل توجيهه  $+\frac{1}{2}$ " تكافئ

$$f'(+1) = \frac{1}{2}$$

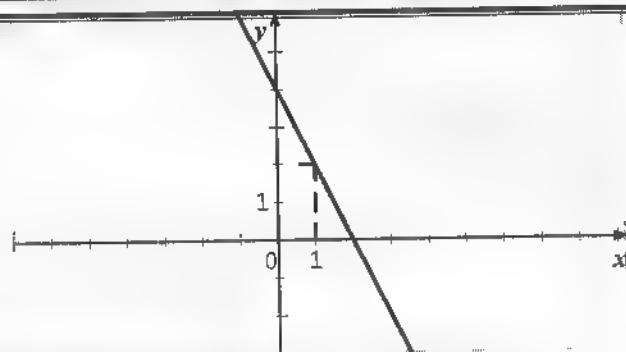
مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  هي

$$f'(x) = \frac{2m+3}{(x+2)^2}$$

$$\text{لكن } f'(+1) = \frac{1}{2} \text{ يكافئ } \frac{2m+3}{9} = \frac{1}{2} \text{ وبالتالي: } m = \frac{3}{4}$$

التمرين 25

ارسم مماس المنحني الممثل لكل دالة  $f$  من الدوال الآتية في النقطة الثابتة التي



وبالتعويض نجد :  $y = -2(x-1) + 2$  ومعادلة المماس هي :  $y = -2x + 4$

$$f(x) = \frac{3x+2}{1-2x}, \quad x_0 = -2 \dots (4)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  ومنه  $f'(-2) = \frac{7}{25}$  و  $f'(x) = \frac{7}{(1-2x)^2}$

$f(-2) = -\frac{4}{5}$  ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها

وبالتعويض نجد :  $y = \frac{7}{25}(x+2) - \frac{4}{5}$  ومعادلة المماس هي :  $y = \frac{7}{25}x - \frac{6}{25}$

$$f(x) = \frac{5x-2}{3x+4}, \quad x_0 = \frac{2}{5} \dots (5)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$  ومنه  $f'\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{25}{26}$  و  $f'\left(\frac{2}{5}\right) = 0$

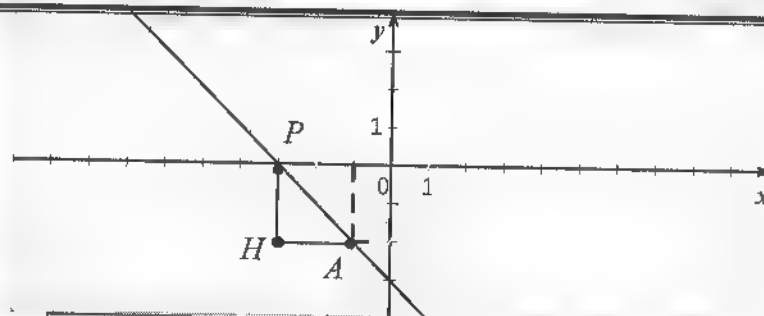
ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

وبالتعويض نجد :  $y = \frac{25}{26}\left(x - \frac{2}{5}\right) + 0$  ومعادلة المماس هي :  $y = \frac{25}{26}x - \frac{5}{13}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = -2 \dots (6)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{0\}$  ومنه  $f'(-2) = \frac{1}{4}$  و  $f'(x) = \frac{-2x}{x^4}$

ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.



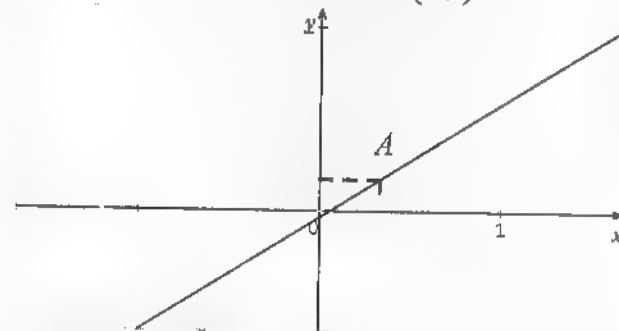
وبالتعويض نجد :  $y = -1(x+1) - 2$  ومعادلة المماس هي :  $y = -x - 3$

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5}, \quad x_0 = \frac{1}{3} \dots (2)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ومنه  $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{45}$  و  $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{135}$  ومنه  $f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}$

لنرسم المستقيم ذا معامل التوجيه  $\frac{28}{45}$  المار بالنقطتين  $A\left(\frac{1}{3}, \frac{23}{135}\right)$  و  $P$

حيث  $\vec{AH} = (2)\vec{i}$  و  $\vec{HP} = (2)\left(\frac{28}{45}\right)\vec{j}$  ( نأخذ ، مثلا ،  $k=2$  )



وبالتعويض نجد :  $y = \frac{28}{45}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{23}{135}$  ومعادلة المماس هي :  $y = \frac{28}{45}x - \frac{5}{135}$

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x_0 = +1 \dots (3)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  ومنه  $f'(+1) = -2$  و  $f'(+1) = +2$  ومنه  $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

و بالتعويض نجد :  $y = \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{4}$  ومعادلة المماس هي :  $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+1}, \quad x_0 = -1 \dots (7)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$  ومنه  $f'(-1) = \frac{3}{2}$  و  $f(-1) = \frac{3}{2}$  ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

و بالتعويض نجد :  $y = \frac{3}{2}(x+1) + \frac{3}{2}$  ومعادلة المماس هي :  $y = \frac{3}{2}x + 3$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2, \quad x_0 = -1 \dots (8)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f'(x) = 8x^3 - 6x$  ومنه  $f'(-1) = -2$  و  $f(-1) = -1$  ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

و بالتعويض نجد :  $y = -2(x+1) - 1$  ومعادلة المماس هي :  $y = -2x - 3$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}, \quad x_0 = -1 \dots (9)$$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f'(x) = \frac{4x^2 - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$  ومنه  $f'(-1) = 0$  و  $f(-1) = 5$

ويرسم المماس بالطريقة السابقة نفسها.

و بالتعويض نجد :  $y = 0(x+1) + 5$  ومعادلة المماس هي :  $y = 5$

## التمرين 26

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x}$$

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :

عين نقط المنحني الممثل للدالة  $f$

- التي يكون فيها المماس أفقيا.
- التي يكون فيها مماس معامل توجيهه (-2).

• التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم ذي المعادلة :  $y = -\frac{1}{2}x - 5$

## الحل

• حتى يكون المماس أفقيا في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  يجب أن يكون معامل توجيهه

معدوما ويكون لدينا :  $f'(x_0) = 0$  , وبما أن  $f'(x) = \frac{-x^2+1}{x^2}$  فإن

(1)  $-x_0^2+1=0$  وبالتالي إما  $x_0 = -1$  أو  $x_0 = +1$  ومنه توجد نقطتان فاصلتهما: -1, 1.

• حتى يكون العدد (-2) معامل توجيهه للمماس في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  يجب أن يكون

لدينا :  $f'(x_0) = -2$  , وبما أن  $f'(x) = \frac{-x^2+1}{x^2}$  فإن  $\frac{-x_0^2+1}{x_0^2} = -2$

و هذا يكافئ  $x_0^2+1=0$  وهي معادلة مستحيلة الحل في  $\mathbb{R}$

وبالتالي لا توجد نقط من المنحني يكون للمماس فيها معامل توجيهه هو -2.

• حتى يكون المماس في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  موازيا للمستقيم ذي

المعادلة  $y = -\frac{1}{2}x - 5$  , يجب أن يكون معامل توجيهه يساوي  $-\frac{1}{2}$

أي :  $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$  , وبما أن  $f'(x) = \frac{-x^2+1}{x^2}$  فإن  $\frac{-x_0^2+1}{x_0^2} = -\frac{1}{2}$

و هذا يكافئ  $x_0^2-2=0$  وبالتالي إما  $x_0 = -\sqrt{2}$  أو  $x_0 = +\sqrt{2}$

ومنه توجد نقطتان فاصلتهما:  $-\sqrt{2}, +\sqrt{2}$ .

## التمرين 27

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين معرفتين كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  و  $g(x) = x^2 + bx + c$  حيث  $b$  و  $c$  عددين حقيقيين.

بين  $b$  و  $c$  حتى يقبل المنحنيين  $C_f$  و  $C_g$  نفس المماس في النقطة  $A(0,1)$

## الحل

إذا كان للمنحنيين  $C_f$  و  $C_g$  نفس المماس في النقطة  $A(0,1)$  فإنه يكون

$$\begin{cases} f'(0) = g'(0) \\ f(0) = g(0) = 1 \end{cases} \text{ وبما أن } f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \text{ و } g'(x) = 2x + b$$



فإن  $f'(0) = -1$  وبالتالي  $2(0) + b = -1$  ومنه  $b = -1$

وبما أن  $f(0) = 1$  فإن  $g(0) = 1$  وبالتالي  $g(0) = 1 - (0) + c = 1$  ومنه  $c = 1$

تطبيقات الدالة المشتقة:

(1) اتجاه التغير:

◊ إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  وكان من أجل كل  $x$  من  $I$   $f'(x) > 0$

فإن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $I$ .

◊ إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  وكان من أجل كل  $x$  من  $I$   $f'(x) < 0$

فإن الدالة  $f$  متناقصة تماماً على  $I$ .

◊ إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  وكان من أجل كل  $x$  من  $I$   $f'(x) = 0$

فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .

أمثلة:

◊ الدالة  $f$  المعرفة على  $D = \mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ .

إن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I = \mathbb{R}$  و  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

نلاحظ أن إشارة  $f'(x)$  من إشارة كثير الحدود  $x^2 - 1$  وهذا ملخص إشارته

$x$	$-\infty$	$-1$	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$

ومنه: على المجال  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  الدالة  $f$  متزايدة تماماً.

وعلى المجال  $]-1, 1[$  الدالة  $f$  متناقصة تماماً.

◊ الدالة  $f$  المعرفة على  $D = \mathbb{R} - \{+1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$

إن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I = \mathbb{R} - \{+1\}$  و  $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

وهذا الكسر الناطق موجب تماماً على  $I$  ومنه:

على المجال  $]-\infty, +1[ \cup ]1, +\infty[$  الدالة  $f$  متزايدة تماماً.

◊ الدالة  $f$  المعرفة على  $D = \mathbb{R} - \{+1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

إن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I = \mathbb{R} - \{+1\}$  و  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

وإشارة هذا الكسر الناطق من إشارة البسط، وهذا ملخص إشارته

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$		$+$	$-$	$+$

ومنه: على المجال  $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$  الدالة  $f$  متزايدة تماماً.

وعلى المجالين  $]0, 1[$  و  $]1, 2[$  الدالة  $f$  متناقصة تماماً.

(2) القيم الحدية لدالة:

◊  $f$  دالة معرفة على  $D$ ،  $I$  مجال بحيث  $I \subset D$  (محتواة في  $D$ )،  $a$  عنصر من  $I$

إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \leq f(a)$  فإن  $f(a)$  قيمة حدية كبرى نسبياً للدالة  $f$ .

إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \geq f(a)$  فإن  $f(a)$  قيمة حدية صغرى نسبياً للدالة  $f$ .

ملاحظة: إذا كانت  $I = D$  تكون القيمة الحدية مطلقة.

◊ - إذا كانت  $f$  دالة تقبل نهاية حدية كبرى عند العدد  $a$  وكانت تقبل الاشتقاق عند  $a$

فإن  $f'(a) = 0$

- والعكس إذا كانت  $f$  دالة تقبل الاشتقاق على مجال مفتوح يشمل عدداً  $a$

وكان  $f'(a) = 0$  وكانت  $f'(x)$  تغير إشارتها عند  $a$  فإن  $f(a)$  قيمة حدية كبرى

للدالة  $f$ .

لأمثلاً: للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  نهاية حدية صغرى

عند القيمة  $x_0 = \frac{1}{3}$  لأن:

(1) ليكن المجال المفتوح  $I = ]0, 1[$  الذي يشمل  $x_0 = \frac{1}{3}$  (وهو مجال من  $\mathbb{R}$ )

(2) من أجل كل  $x$  من المجال  $I$ :  $f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right)$

(3) نقطة الانعطاف:

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[a, b]$

وكانت  $M_0(x_0, f(x_0))$  نقطة من القوس  $AB$

بحيث يخترق المنحني الممثل للدالة  $f$  مماسه في

هذه النقطة فإن النقطة  $M_0$

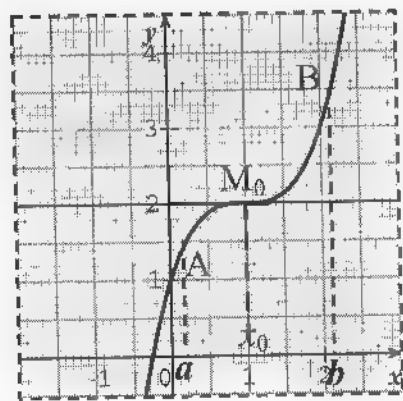
سمي: "نقطة انعطاف المنحني  $C_f$ "

نتيجة: البحث عن أحداثي نقطة الانعطاف

إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق مرتين على

مجال مفتوح يشمل  $x_0$  وإذا انعدمت دالتها

المشتقة الثانية من أجل  $x_0$ ، مغيرة إشارتها فإن النقطة  $M_0(x_0, f(x_0))$



من المنحني الممثل للدالة  $f$  هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة  $f$ .  
دراسة الدوال :

### أ. دراسة التغيرات وخطواتها هي :

- 1- تعيين مجموعة التعريف  $D$  ، وهي  $\mathbb{R}$  أو جزء من  $\mathbb{R}$  ( إلا إذا أعطيت )
- 2- دراسة شفعية الدالة أو دوريتها بقصد تقليص مجال الدراسة ، إذ يمكنك حصر الدراسة على مجموعة القيم الموجبة أو المعدومة.
- 3- حساب نهايات الدالة على أطراف مجال الدراسة .
- 4- حساب الدالة المشتقة على المجال الذي تقبل عليه الدالة الاشتقاق .
- 5- دراسة إشارة الدالة المشتقة على  $D$  واستنتاج اتجاه تغير الدالة .
- 6- تسجيل النتائج المتحصل عليها في جدول تغيرات الدالة .

### II. رسم المنحني الممثل للدالة

#### قبل رسم المنحني ننجز بالآتي :

- 1- دراسة الفروع اللانهائية .
- 2- تحديد النقاط الخاصة من خلال حساب إحداثياتها . ومن أهم هذه النقاط :  
- نقط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات .  
- النقاط الحدية (من جدول التغيرات) .  
- غيرها ( حسب المطلوب ) .

#### ثم نرسم المنحني باتباع الخطوات الآتية :

- 1- نرسم المعلم حسب الطلب .
- 2- نرسم المستقيمات المقاربة باستعمال معادلاتها .
- 3- نرسم النقاط الخاصة ، مع رسم المماسات ، إن توفرت ، عندها .
- 4- نرسم المنحني بالاستعانة بجدول التغيرات فهو المرشد الأمين في هذه المرحلة الحاسمة .

### أمثلة على دراسة الدوال :

#### الدوال الناقطة :

لندرس الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

#### ندرس اتجاه التغير أولاً :

( أ ) مجموعة التعريف : الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty, +2[ \cup ]2, +\infty[$   
( ب ) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +2^-} f(x) = \frac{+1}{0^+} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

#### ( جـ ) الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]-\infty, +2[ \cup ]2, +\infty[$$

وإشارته من إشارة  $x^2 - 4x + 3$

( د ) جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$+1$	$+2$	$+3$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f(x)$		$-\infty$	$3$	$+\infty$	$+\infty$

### ثم نرسم المنحني الممثل للدالة :

المعلم المختار متعامد ومتجانس .

دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +2} f(x) = \pm\infty$  فإن  $x = +2$  مستقيم مقارب يوازي  $(y/y)$  .

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  ، ننجز الخطوات الآتية :

في جوار  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{( أ ) نحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (+1)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 7}{x - 2} = -3 \quad \text{( ب ) نحسب}$$

$$y = (+1)x + (-3) = x - 3 \quad \text{( جـ ) يقبل المنحني مستقيماً مقارباً (مائلاً) معادلته}$$

في جوار  $+\infty$  نفس النتيجة السابقة .

**تذكير :** لإثبات أن المستقيم الذي معادلته  $y = ax + b$  مستقيم مقارب للمنحني

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

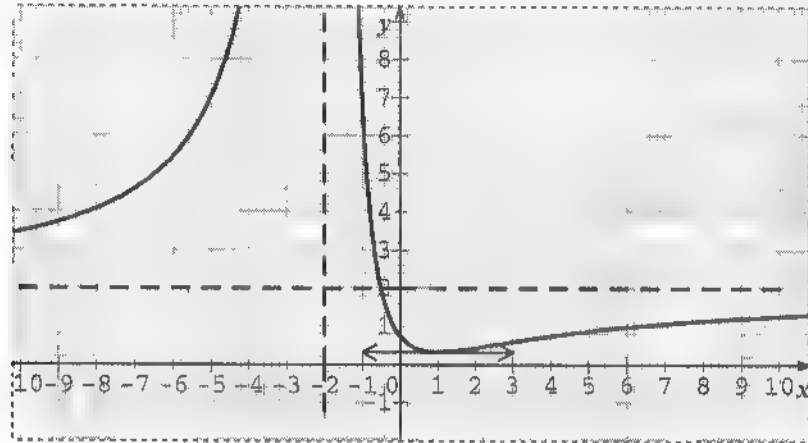
$$\text{ففي المثال السابق : بما أن } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+1}{x - 2} = 0$$

فإن  $y = x - 3$  مستقيم مقارب للمنحني .

$x$	$+1$	$+3$
$f(x)$	$-3$	$+1$

جدول القيم العددية : من جدول التغيرات

- بما أن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$  فإن  $x = -2$  مستقيم مقارب يوازي  $(y/y)$ ، حسب القاعدة (1)  
بما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +2$  فإن  $y = +2$  مستقيم مقارب يوازي  $(x/x)$ ، حسب القاعدة (2)



الدوال الصماء :

لندرس الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{2x+5}$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[-\frac{5}{2}, +\infty[$

(ب) حساب النهايات :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ج) الدالة المشتقة :

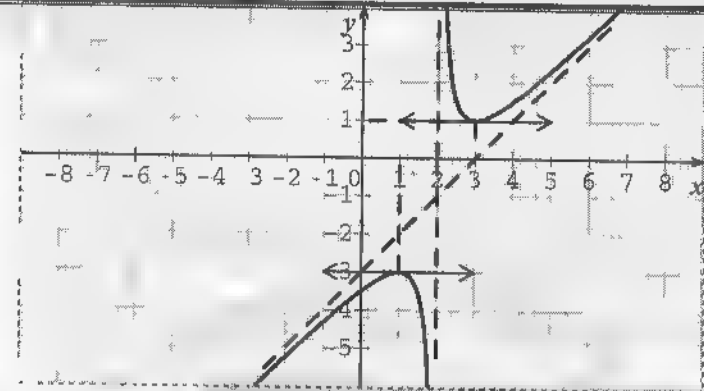
من أجل كل  $x$  من  $[-\frac{5}{2}, +\infty[$   $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}}$  وإشارته موجبة.

(د) جدول التغيرات :

$x$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

تم رسم المنحنى الممثل للدالة  $f$  :

المعلم المختار متعامد ومتجانس.



لندرس الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 3}{(x+2)^2}$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$

(ب) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = +2, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{+15}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{+15}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = +2$$

(ج) الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{10(x-1)(x+2)}{(x+2)^4} \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

وإشارته من إشارة  $(x-1)(x+2)$

(د) جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$+2$	$+\infty$	$+\frac{1}{3}$	$+2$

تم رسم المنحنى الممثل للدالة  $f$  :

المعلم المختار متعامد ومتجانس.

دراسة الفروع اللانهائية :

يكون  $f'(x) < 0$  إذا فقط إذا كان  $x$  من المجال  $]-\infty, +1]$   
(د) جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$+1$	$+3$	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

ثم نرسم المنحنى الممثل للدالة  $f$  :

المعلم المختار متعامد ومتجانس.

دراسة الفروع اللانهائية :

في جوار  $-\infty$

(أ) نحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x}$$

وبما أن  $x$  في جوار  $-\infty$  فإن  $|x| = -x$  وبالتالي

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = -1$$

(ب) نحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x}$$

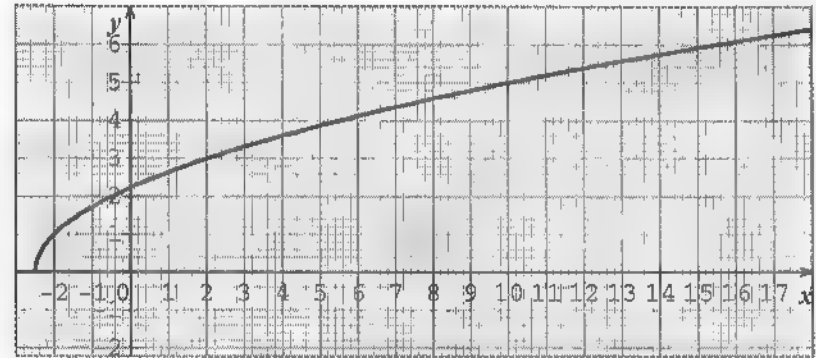
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( -4 + \frac{3}{x} \right)}{x \left( \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

دراسة الفروع اللانهائية :  
في جوار  $+\infty$

(أ) نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+5}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x\sqrt{2x+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 2 + \frac{5}{x} \right)}{x\sqrt{2x+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{\sqrt{2x+5}} = 0$$

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  فإن المنحنى يقبل فرعاً من قطع مكافئ في اتجاه  $(x', x)$



لندرس الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

لندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty, +1] \cup [+3, +\infty[$

(ب) حساب النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$

(ج) الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, +1[ \cup [+3, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

و إشارته من إشارة  $2x - 4$  وهو عبارة عن ثنائي حد من الدرجة الأولى جذره  $+2$  وملخص إشارته على  $]-\infty, +1[ \cup [+3, +\infty[$  هو

يكون  $f'(x) > 0$  إذا فقط إذا كان  $x$  من المجال  $[+3, +\infty[$

(ج) يقبل المنحني مستقيماً مقارباً معادلته  $y = -x + 2$ في جوار  $+\infty$ 

$$(أ) \text{ نحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x}$$

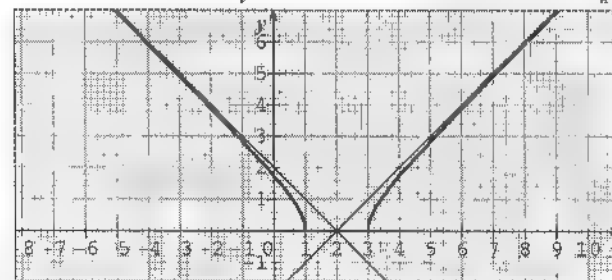
وبما أن  $x$  في جوار  $+\infty$  فإن  $|x| = +x$  وبالتالي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = 1$$

(ب) نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( -4 + \frac{3}{x} \right)}{x \left( \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

(ج) يقبل المنحني مستقيماً مقارباً معادلته  $y = x - 2$ 

## الدوال الناقطة

## التمرين 28

ادرس اتجاه تغير الدوال الآتية ثم ارسم المنحنيات الممثلة لها في معلم متعامد ومتجانس.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 1} \dots (1) \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} \dots (2)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 6x + 8} \dots (3) \quad , \quad f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x + 5} \dots (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \dots (5) \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \dots (6)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4} \dots (7) \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2} \dots (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \dots (9) \quad , \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{1 - x^2} \dots (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{(x + 3)^4} \dots (11) \quad , \quad f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2}{x^2 + x - 6} \dots (12)$$

## الحل

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 1} \dots (1)$$

لندرس اتجاه التغير أولاً:

(أ) مجموعة التعريف: الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$ 

(ب) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{+8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{+8}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} \dots (2)$$

للتدرج اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة معرفة على المجال  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$   
(ب) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(ج) الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x + 2)^2} \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

وإشارته من إشارة  $x^2 + 4x + 7$  والدالة المشتقة موجبة على  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$ .  
(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

ثم نرسم المنحنى الممثل للدالة :

المعلم المختار متعامد ومتجانس.  
دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$  فإن للمنحنى مستقيماً مقارباً يوازي  $(y/y)$  معادلته  $x = -2$  في جوار  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = +1 \quad \text{نحسب (أ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (+1)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+2} = +1 \quad \text{نحسب (ب)}$$

(ج) يقبل المنحنى مستقيماً مقارباً (مائلاً) معادلته  $y = x + 1$

في جوار  $+\infty$  نفس النتيجة السابقة.

(ج) الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(x - 2)^2} \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

وإشارته من إشارة  $x^2 + 2x - 3$  وبالتالي تنعدم الدالة المشتقة من أجل القيمتين  $+1$  و  $-3$  وتكون موجبة على  $]-\infty, -3[ \cup ]-1, +\infty[$  وسالبة على  $]-3, -1[ \cup ]-1, +1[$ .

(د) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-3	-1	+1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-17	$+\infty$	-1	$+\infty$

ثم نرسم المنحنى الممثل للدالة :

المعلم المختار متعامد ومتجانس.

دراسة الفروع اللانهائية :

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$  فإن للمنحنى مستقيماً مقارباً يوازي  $(y/y)$  معادلته  $x = -1$  في جوار  $-\infty$ .

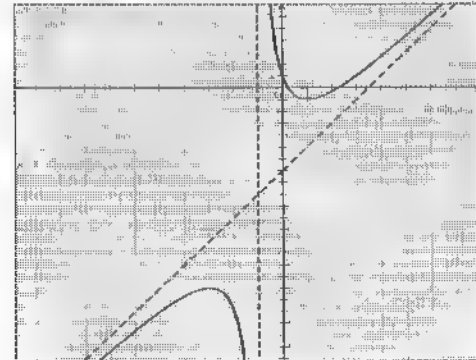
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = +2 \quad \text{نحسب (أ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (+2)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x + 1}{x + 1} = -7 \quad \text{نحسب (ب)}$$

(ج) يقبل المنحنى مستقيماً مقارباً (مائلاً) معادلته  $y = 2x - 7$

في جوار  $+\infty$  نفس النتيجة السابقة.

جدول القيم العددية : من جدول التغيرات





$x$	$-\infty$	$-4$	$2\sqrt{2}$	$2$	$+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$+\infty \nearrow +2.9$	$+$	$+$	$+$	$0$

تم برسم المنحني الممثل للدالة  $f$ :

المعلم المختار متعامد ومتجانس.

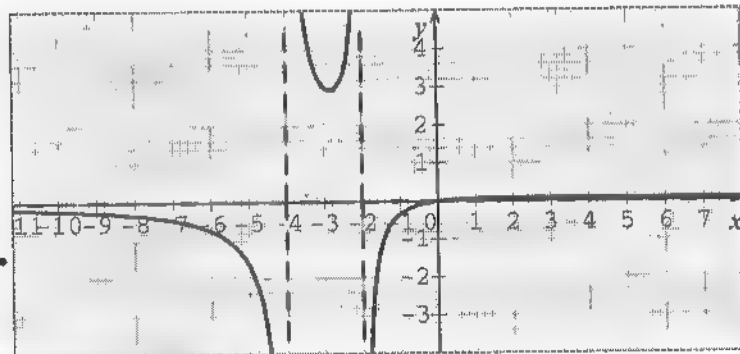
دراسة الفروع اللانهائية:

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \pm\infty$  فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي معادلته  $x = -4$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$  فإن للمنحني مستقيما مقاربا يوازي معادلته  $x = -2$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  فإن  $(x'x)$  مقارب للمحلي.

جدول القيم العددية: نكتفي بما في جدول التغيرات.



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \dots (5)$$

لندرس اتجاه التغير أولا:

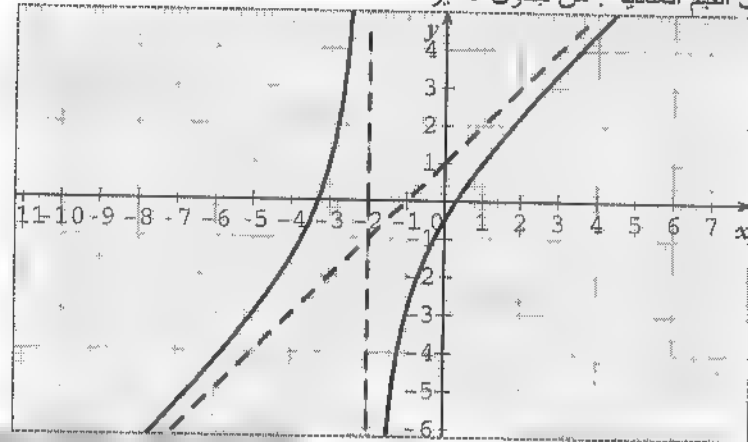
(أ) مجموعة التعريف: الدالة معرفة على المجال  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, 2[ \cup ]2, +\infty[$

(ب) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = +1, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{+3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{+3}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{+3}{0^-} = -\infty$$

جدول القيم العددية: من جدول التغيرات



$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 6x + 8} \dots (3)$$

لندرس اتجاه التغير أولا:

(أ) مجموعة التعريف: الدالة معرفة على المجال  $]-\infty, -4[ \cup ]-4, -2[ \cup ]-2, +\infty[$

(ب) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(ج) الدالة المشتقة:

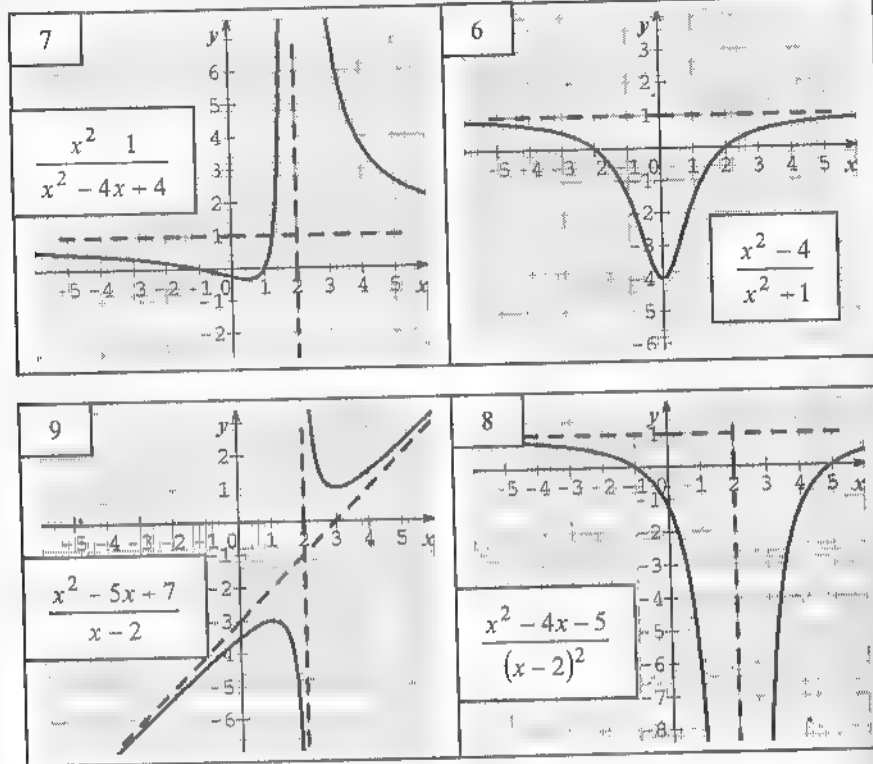
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 8}{(x^2 + 6x + 8)^2} \quad ]-\infty, -4[ \cup ]-4, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

وإشارته من إشارة  $-x^2 + 8$  وتنعقد الدالة المشتقة من أجل القيمتين:  $-2\sqrt{2}$ ،  $+2\sqrt{2}$

وتكون سالبة على:  $]-\infty, -2\sqrt{2}[ \cup ]+2\sqrt{2}, +\infty[$  وموجبة على المجال  $]-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2}[$

(د) جدول التغيرات:

واصل بنفس الطريقة للوصول إلى المنحنيات الآتية:



$$f(x) = x^2 + \frac{1}{1 - x^2} \dots (10)$$

الدرس 10 اتجاه التغير أولاً:

(أ) مجموعة التعريف: الدالة معرفة على المجال  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +1[ \cup ]+1, +\infty[$   
(ب) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 + \frac{+1}{0^+} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 + \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} f(x) = 1 + \frac{+1}{0^-} = -\infty, \lim_{x \rightarrow +1^+} f(x) = 1 + \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1 + \frac{+1}{0^-} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +1 + \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{+3}{0^+} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = +1$$

(ج) الدالة المشتقة:

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} \quad ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +2[ \cup ]+2, +\infty[$$

وإشارته من إشارة  $-6x$  وتنعقد الدالة المشتقة من أجل القيمة 0:

وتكون سالبة على:  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, 0[$  وموجبة على المجال  $]0, +2[ \cup ]+2, +\infty[$

(د) جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	0	+2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$+\infty$	$+\frac{1}{4}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

ثم نرسم المنحنى الممثل للدالة f:

المعلم المختار متعامد ومتجانس.

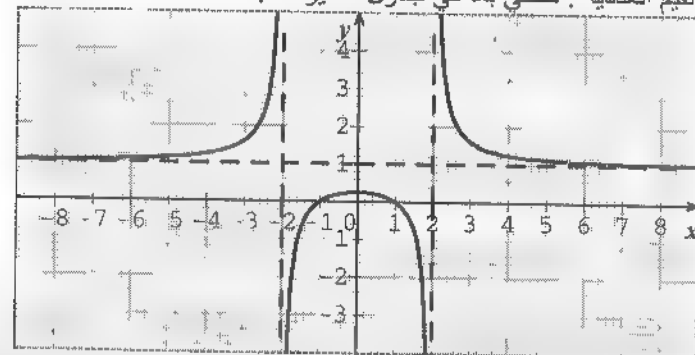
دراسة الفروع اللانهائية:

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$  فإن للمنحنى مستقيماً مقارباً يوازي  $(y/y)$  معادلته  $x = -2$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +2} f(x) = \pm\infty$  فإن للمنحنى مستقيماً مقارباً يوازي  $(y/y)$  معادلته  $x = +2$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +1$  فإن للمنحنى مستقيماً مقارباً يوازي  $(x/x)$  معادلته  $y = +1$

جدول القيم العددية: نكتفي بما في جدول التغيرات.



التمرين 30

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + x + 3}$

- (1) عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  . استنتج أن للمنحني مستقيما مقاربا , عين معادلة له.
- (2) ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

(3) يرهن أن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $x = -\frac{1}{2}$  محور تناظر للمنحني  $C_f$  .

(4) عين نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات.

(5) ارسم  $C_f$  في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1. \quad (1)$$

إذن للمنحني  $C_f$  مستقيم مقارب أفقي معادلته :  $y = 1$  .

$$f'(x) = \frac{15(2x+1)}{(x-2)^2} \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad (2)$$

وإشارته من إشارة  $(2x+1)$  وهو ثنائي حد من الدرجة الأولى , جذره  $-\frac{1}{2}$  وإليك

ملخص إشارته في الجدول الآتي :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	5	$-\frac{49}{11}$	5

جدول التغيرات :

$x$	2	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$$(3) \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

فإن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = -x-1$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$  .

لدراسة وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى  $D$  , ندرس إشارة الفرق  $f(x) - (-x-1)$

$$\text{نلاحظ أن إشارة الفرق } f(x) - (-x-1) = \frac{1}{x-2} \text{ من إشارة } x-2 .$$

ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$  ,  $x-2 > 0$  . وبالتالي يقع  $C_f$  فوق  $D$  .

(4) قبل الشروع في الرسم

• نعين معادلة المماس  $T$  وشكلها العام هو :  $y = f'(3)(x-3) + f(3)$  .

وبما أن  $f'(3) = -2$  و  $f(3) = -3$  فإن معادلة  $T$  هي :  $y = -2x+3$  .

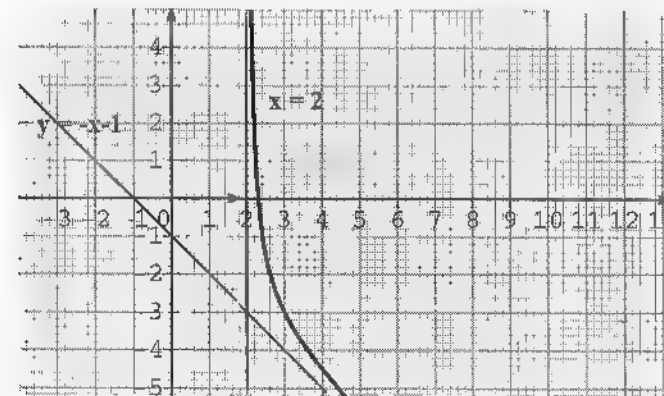
• نلاحظ أن  $C_f$  يقبل مستقيما مقاربا - آخر - عموديا معادلته  $x = 2$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

• الرسم وخطواته هي :

- نرسم المستقيمين المقاربين .

- نرسم  $C_f$  على المجال  $I$  بتوجيه من جدول التغيرات.



(3) بالإمكان كتابة  $f(x)$  على الشكل الآتي :  $f(x) = \frac{x(x+1)-12}{x(x+1)+3}$

من أجل  $\left(-\frac{1}{2}+h\right)$  من  $\mathbb{R}$  ، لدينا :

$$f\left(-\frac{1}{2}+h\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}+h\right)\left(-\frac{1}{2}+h+1\right)-12}{\left(-\frac{1}{2}+h\right)\left(-\frac{1}{2}+h+1\right)+3} = \frac{\left(h-\frac{1}{2}\right)\left(h+\frac{1}{2}\right)-12}{\left(h-\frac{1}{2}\right)\left(h+\frac{1}{2}\right)+3} \dots (1)$$

ومن أجل  $\left(-\frac{1}{2}-h\right)$  من  $\mathbb{R}$  ، لدينا :

$$f\left(-\frac{1}{2}-h\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}-h\right)\left(-\frac{1}{2}-h+1\right)-12}{\left(-\frac{1}{2}-h\right)\left(-\frac{1}{2}-h+1\right)+3} = \frac{\left(-h-\frac{1}{2}\right)\left(-h+\frac{1}{2}\right)-12}{\left(-h-\frac{1}{2}\right)\left(-h+\frac{1}{2}\right)+3} \\ = \frac{\left(h+\frac{1}{2}\right)\left(h-\frac{1}{2}\right)-12}{\left(h+\frac{1}{2}\right)\left(h-\frac{1}{2}\right)+3} \dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن  $f\left(-\frac{1}{2}+h\right) = f\left(-\frac{1}{2}-h\right)$

وبالتالي المستقيم  $D$  الذي معادلته  $x = -\frac{1}{2}$  محور تناظر للمنحنى  $C_f$ .

(4) فواصل نقط تقاطع  $C_f$  مع محور الفواصل هي حلول المعادلة  $\frac{x^2+x-12}{x^2+x+3} = 0$

في المجموعة  $\mathbb{R}$  ، ومنه  $x^2+x-12=0$  ولهذه المعادلة حلان هما :  $-4$  ،  $3$  ، وبالتالي يتقاطع  $C_f$  مع محور الفواصل في نقطتين إحداثيات كل منهما  $(-4,0)$  و  $(3,0)$ .

وترتيب نقطة تقاطع  $C_f$  مع محور الترتيب هو  $f(0) = -4$  وبما أن  $f(0) = -4$  فإن

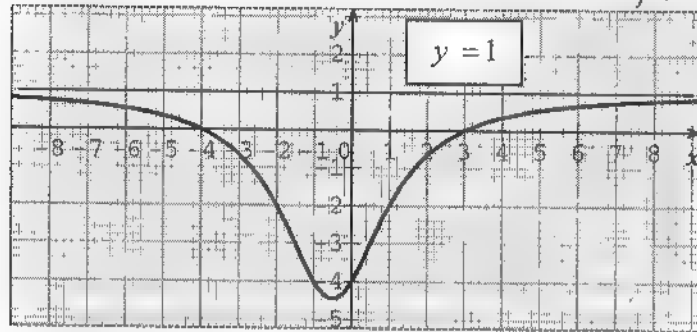
إحداثيات نقطة تقاطع  $C_f$  مع محور الترتيب هما  $(0,-4)$

(5) رسم  $C_f$  وخطواته هي :

- نرسم المستقيم المقارب الوحيد .
- نرسم النقاط الخاصة ، دون أن ننسى النهاية الحدية الصغرى والتي إحداثياتها

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{11}\right)$$

نرسم  $C_f$  على  $\mathbb{R}$  بتوجيه من جدول التغيرات.



### التمرين 31

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $I = ]1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

- (1) عين نهايتي  $f$  عند  $1$  وعند  $+\infty$  .
- (2) ادرس تغيرات  $f$  على  $I$  .
- (3) يرهن أن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x + 2$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$  .
- ادرس وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى المستقيم  $D$  على  $I$  .
- (4) برهن أن المعادلة  $f(x) = 7$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في  $[2,3]$  .
- عين قيمة مقربة لـ  $x_0$  إلى  $0.1$  بالزيادة .
- (5) ارسم  $C_f$  في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

### الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (1)$$

إذن للمنحنى  $C_f$  مستقيم مقارب عمودي معادلته :  $x = 1$  .

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3)}{(x-1)^4}, \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad (2)$$

وبتحليل البسط يصبح لدينا :

$$f'(x) = \frac{x^2(x-1)[3(x-1)-2x]}{(x-1)^2} = \frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

وإشارة  $f'(x)$  من إشارة الجداء  $(x-1)(x-3)$  وهو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 1, 3 وإليك ملخص إشارته في الجدول الآتي :

$x$	1	3	$+\infty$
$(x-1)(x-3)$	-	0	+

جدول التغيرات :

$x$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = 0$$

(3) بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$  فإن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x+2$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$ .  
لدراسة وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى  $D$  ندرس إشارة الفرق  $f(x) - (x+2)$ .  
نلاحظ أن إشارة الفرق  $f(x) - (x+2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$  من إشارة  $(3x-2)$ .  
ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$  ،  $3x-2 > 0$  وبالتالي يقع  $C_f$  فوق  $D$ .

$$(4) \text{ بما أن } f \text{ مستمرة ومتناقصة تماما على } [2,3] \text{ و } f(2) = 8 \text{ و } f(3) = \frac{27}{4}$$

فإن للمعادلة  $f(x) = 7$  حلا وحيدا  $x_0$  على هذا المجال.

من أجل تعيين قيمة مقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالزيادة، نمسح المجال  $[2,3]$  بخطوة قدرها 0.1 كالآتي :

$x$	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$f(x)$	8.0	7.7	7.4	7.2	7.1	6.9					

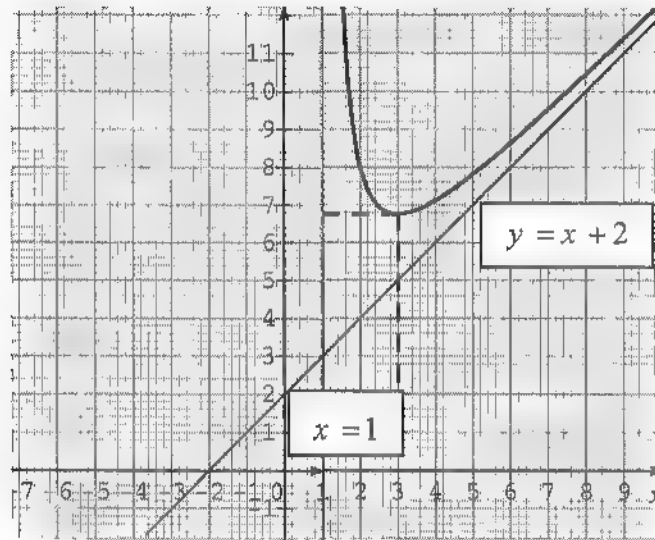
نوقف الحساب بعد 2.5 لأن  $f(x)$  تركت 7 وراءها.

نستنتج من الجدول أن القيمة المقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالزيادة هي 2.4.

(5) الرسم وخطواته هي :

نلاحظ أن  $C_f$  يمر بالمبدأ  $O(0,0)$  ، وله نهاية حدية صغرى إحداثياتها  $(3, \frac{27}{4})$

نرسم المستقيمين المقاربين .  
نرسم  $C_f$  على المجال  $I$  بتوجيه من جدول التغيرات.



### التمرين 32

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $I = ]0, +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3}$$

(1) ادرس نهايتي  $f$  عند 0 وعند  $+\infty$ .

$$(2) \text{ برهن أنه من أجل كل } x \text{ من } I, f(x) = \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 6)}{x^4}$$

• استنتج تغيرات  $f$  على  $I$ .

(3) يبرهن أن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x - 1$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$ .

لدرس وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى المستقيم  $D$  على  $I$ .

(4) برهن أنه توجد نقطتان من  $C_f$  يكون فيهما المماس موازيا للمستقيم  $D$ .

(5) برهن أن المعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في  $[1, 2]$ .

• عين قيمة مقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالنقصان.

(6) ارسم  $C_f$  في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 + \frac{2}{0^+} = +\infty \quad (1)$$

إذن للمنحنى  $C_f$  مستقيم مقارب عمودي معادلته:  $x = 0$  وهو حامل محور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{(2x-3)(x^3) - 3x^2(x^2-3x+2)}{x^6}, \quad I \text{ من } x \text{ من } (2)$$

$$f(x) = 1 + \frac{(x)(2x-3) - 3(x^2-3x+2)}{x^4} = 1 + \frac{-x^2+6x-6}{x^4} = \frac{x^4-x^2+6x-6}{x^4}$$

ونلاحظ أن جذر للبسط الذي هو عبارة عن كثير حدود.

إذن يحل إلى عوامل أحدها  $(x-1)$  ومنه

$$x^4 - x^2 + 6x - 6 = (x-1)(x^2 + x^2 + 6)$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4}, \quad I \text{ من } x \text{ كل من } (2)$$

• استنتاج تغيرات  $f$  على  $I$ . إن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $(x-1)$  وملخص إشارته في الجدول الآتي:

$x$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

جدول التعيرات:

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3} = 0 \quad (3)$$

فإن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x+1$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$ .

لدراسة وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى  $D$ , ندرس إشارة الفرق  $f(x) - (x+1)$ .

$$\text{نلاحظ أن إشارة الفرق } f(x) - (x+1) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} \text{ من إشارة } (x^2 - 3x + 2).$$

$x$	0	1	2	$+\infty$
إشارة الفرق	+	0	-	+
الوضعية	$D$ فوق $C_f$	$D$ أسفل $C_f$	$D$ فوق $C_f$	

(4) يكون المماس للمنحنى  $C_f$  في النقطة التي فاصلتها  $x_0$  موازيا للمستقيم  $D$

$$\text{إذا تحقق ما يلي: } f'(x_0) = 1 \text{ وينتج } \frac{-x^2+6x-6}{x^4} = 0 \text{ وهذا يكافئ}$$

$$-x^2+6x-6=0 \text{ ولهذه المعادلة في } I \text{ حلان هما: } 3-\sqrt{3} \text{ و } 3+\sqrt{3} \text{ وهما}$$

قيمتا  $x_0$ . ومنه توجد نقطتان من  $C_f$  يكون فيهما المماس موازيا للمستقيم  $D$ .

(5) بما أن  $f$  مستمرة ومنتزعة تماما على  $[1, 2]$  و  $f(1) = 0$  و  $f(2) = 1$

فإن المعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في  $[1, 2]$ .

• من أجل تعيين قيمة مقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالنقصان، نمسح المجال  $[1, 2]$  بخطوة قدرها

0.1 كالآتي:

$x$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	0.00	0.03	0.11	0.20	0.31	0.43	0.54				

نوقف الحساب بعد 1.6 لأن  $f(x)$  تجاوزت  $\frac{1}{2}$ .

نستنتج من الجدول أن القيمة المقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالنقصان هي 1.5.

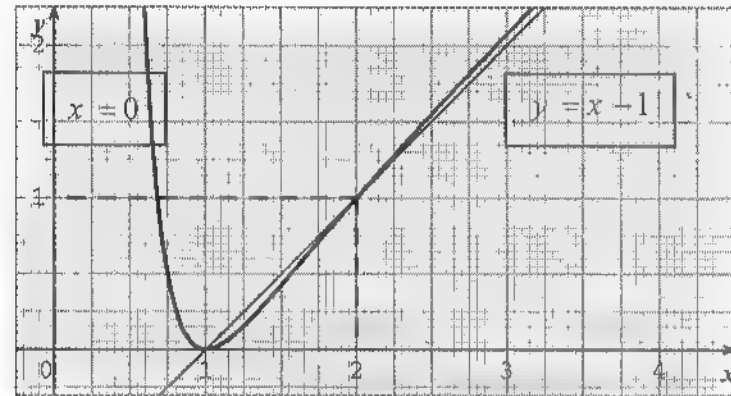
(6) الرسم وخطواته هي:



نلاحظ أن للمنحنى  $C_f$  نهاية حدية صغرى إحداثياتها  $(1,0)$

نرسم المستقيمين المقاربين .

نرسم  $C_f$  على المجال  $I$  بتوجيه من جدول التغيرات، مع ملاحظة الوضعية النسبية لكل من  $C_f$  و  $D$ .



### التمرين 33

لتكن  $f$  الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$

- ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- غين إحداثيي كل من  $A$  ,  $B$  نقطتي تقاطع المنحنى  $C_f$  مع محوري الإحداثيات، ثم اكتب معادلتين لمماسي المنحنى  $C_f$  في هاتين النقطتين .
- برهن أن المنحنى  $C_f$  يقبل نقطة انعطاف  $\Omega$  , عين إحداثياتها .  
- برهن أن النقطة  $\Omega$  مركز تناظر المنحنى  $C_f$  .
- ارسم  $C_f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

### الحل

#### (1) دراسة تغيرات الدالة $f$

**مجموعة التعريف** تكون الدالة  $f$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $x^2-x-2 \neq 0$  أي  $(x \neq 2 \text{ و } x \neq -1)$

ومنه مجموعة تعريف  $f$  هي :  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 2[ \cup ]2, +\infty[$

ملاحظة : من المفيد استنتاج إشارة المقام الذي هو كثير حدود من الدرجة الثانية ، لاستعمالها

أثناء حساب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

النهايات  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

#### الدالة المشتقة

من أجل كل  $x$  من  $D_f$  ,  $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2}$

وإشارته من إشارة  $2x^2 - 2x + 5$  وهو كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه سالب تماما وبالتالي من أجل كل  $x$  من  $D_f$  ,  $f'(x) > 0$

#### جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-1$	$+2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	

(2) لنقطتا تقاطع المنحنى  $C_f$  مع المحورين  $A(0, -\frac{1}{2})$  و  $B(\frac{1}{2}, 0)$

معادلة المماس في النقطة  $A(0, -\frac{1}{2})$  هي :  $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

ومعادلة المماس في النقطة  $B(\frac{1}{2}, 0)$  هي :  $y = \frac{8}{9}(x - \frac{1}{2})$

(3) نقطة الانعطاف  $\Omega$  من أجل كل  $x$  من  $D_f$

$$f(x) = \frac{(4x-2)(x^2-x-2)^2}{(x^2-x-2)^4} = \frac{2(x^2-x-2)(2x-1)(2x^2-2x+5)}{(x^2-x-2)^4}$$

في مثل هذه المواقف، فكر في التحليل أولا وإذا لم تتمكن ، فلا مناص من النشر .

$$f(x) = \frac{2(x^2-x-2)(2x-1)[(x^2-x-2)-(2x^2-2x+5)]}{(x^2-x-2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(2x-1)(-x^2+x-7)}{(x^2-x-2)^3}$$

ومن أجل كل  $x$  من  $D_f$  ،

وملخص إشارة  $f''(x)$  في الجدول الآتي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$+2$	$+\infty$
$2x-1$	-	-	+	+	
$-x^2+x-7$	-	-	-	-	
$x^2-x-2$	+	-	-	+	
$f''(x)$	+	-	+	-	

والخلاصة أن  $f''(x)$  تنعدم عند  $\frac{1}{2}$  مغيرة إشارتها ، وهذا يعني أن المنحني  $C_f$  يقبل

نقطة انعطاف  $\Omega$  إحداثياتها  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

النقطة  $\Omega$  مركز تناظر المنحني  $C_f$

من أجل كل  $x = \frac{1}{2} + h$  من  $D_f$  ، العدد  $x = \frac{1}{2} - h$  ينتمي إلى  $D_f$  .

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2} \quad \text{نحسب}$$

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \frac{1-2\left(\frac{1}{2}+h\right)}{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+h\right) - 2} = \frac{-2h}{h^2 - \frac{9}{4}}$$

لدينا

$$f\left(\frac{1}{2}-h\right) = \frac{1-2\left(\frac{1}{2}-h\right)}{\left(\frac{1}{2}-h\right)^2 - \left(\frac{1}{2}-h\right) - 2} = \frac{2h}{h^2 - \frac{9}{4}}$$

ولدينا

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2} = 0 \quad \text{نتج أن}$$

نستنتج أن النقطة  $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  مركز تناظر المنحني  $C_f$ .

#### (4) رسم المنحني $C_f$

- يقبل للمنحني  $C_f$  ثلاثة مستقيمت مقارنة أحدها أفقي معادلته :

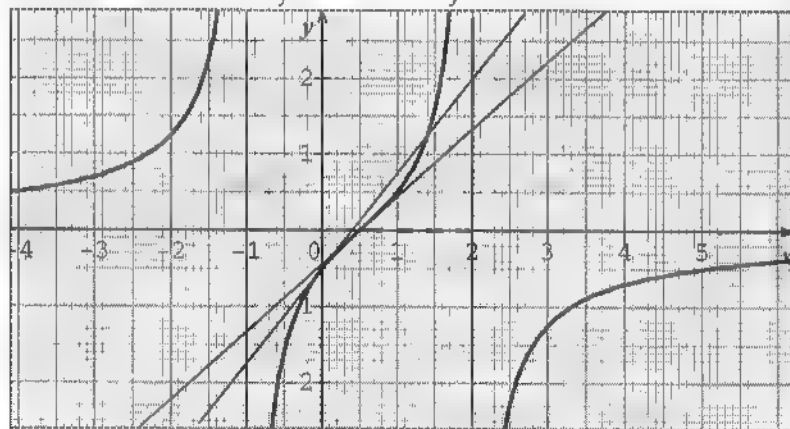
$y=0$  و الآخران عموديان معادلتهما :  $x=2$  و  $x=-1$ .

- الرسم وخطواته هي :

• نرسم المستقيمت المقاربة الثلاثة .

• نرسم النقطتين  $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  و  $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

• نرسم  $C_f$  على المجال  $D_f$  بتوجيه من جدول التغيرات.



لاحظ وضعية المنحني  $C_f$  بالنسبة إلى المماس في نقطة الانعطاف .

ونعبر عن هذا بقولنا : " يخترق المنحني  $C_f$  مماسه في نقطة الانعطاف "

#### التمرين 34

تكن  $f$  الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$

(1) عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) برهن أنه يمكن وضع  $f(x)$  على الشكل الآتي :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(3) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

(4) برهن أن للمنحنى  $C_f$  مستقيمين مقاربين أحدهما  $D$  مائل والآخر عمودي.

— أعط معادلتيهما.

— ادرس وضعية المنحنى  $C_f$  بالنسبة إلى المقارب المائل  $D$ .

(5) ارسم  $C_f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(6) برهن أن  $C_f$  يقبل مركز تناظر.

(7) عين، تبعا للوسيط  $m$ ، عدد حلول المعادلة الآتية:  $x^2 - (m-1)x + m = 0$ .

ثم عين النتائج باستعمال المنحنى  $C_f$ .

(8) ليكن  $C_g$  المنحنى الممثل للدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}$

— كيف يمكن استنتاج  $C_g$  باستعمال  $C_f$ ؟

— ارسم  $C_g$  في نفس المعلم.

### الحل

#### (1) مجموعة تعريف الدالة $f$

مجموعة التعريف تكون الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان  $x-1 \neq 0$ ، أي  $x \neq 1$

ومنه مجموعة تعريف  $f$  هي:  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

ملاحظة: من المفيد استنتاج إشارة المقام الذي هو كثير حدود من الدرجة الأولى، لاستعمالها

أثناء حساب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

#### (2) الشكل الجديد $f(x)$

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-1}$$

من أجل كل  $x$  من  $D_f$ ,

$$\begin{cases} a-1 \\ b-2 \\ c=2 \end{cases} \quad \text{وبالتالي} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1-1 \\ -b+c=0 \end{cases}$$

ويكون لدينا  $f(x) = x + 2 + \frac{2}{x-1}$

#### (3) دراسة تغيرات الدالة $f$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \frac{2}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

الدالة المشتقة لاحظ أن لعبارة الدالة شكلين فاختر أنسبهما لحساب الدالة المشتقة

$$f'(x) = 1 + \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}, \quad D_f \text{ من } x$$

وإشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x^2 - 2x - 1$  وهو كثير حدود من الدرجة الثانية له جذران

هما:  $1 - \sqrt{2} \approx -0.41$ ,  $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$ .

وملخص إشارة  $f'(x)$  في الجدول الآتي:

$X$	$-\infty$	$-0.41$	$+1$	$2.41$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 1$		+	0	-	+

#### جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-0.41$	$+1$	$2.41$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0.17$	$\searrow$	$-0.64$	$\nearrow$	$+\infty$

#### (4) البحث عن المستقيمين المقاربين ودلالة الوضعية النسبية

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$  فإن المستقيم الذي معادلته  $x = 1$  مستقيم مقارب عمودي

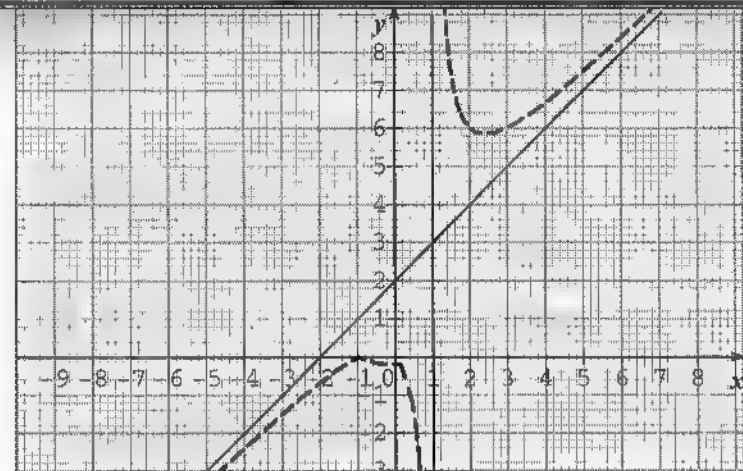
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

وبما أن  $D$  المستقيم الذي معادلته  $y = x + 2$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $C_f$ .

لدراسة وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل  $D$ ، ندرس إشارة الفرق

$f(x) - (x+2)$ ، نلاحظ أن إشارته من إشارة  $\frac{2}{x-1}$  وإشارة هذا الكسر من إشارة

ثنائي الحد  $x-1$  وملخص الناتج في الجدول الآتي:



## التمرين 35

لتكن  $f$  الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$

(1) عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

- قسم المجموعة  $D_f$  إلى مجالين بحيث في كل منهما تكتب  $f(x)$  بدون القيمة المطلقة.

- عين في كل حالة من الحالتين السابقتين، أعدادا حقيقية  $a$ ،  $b$ ،  $c$  بحيث

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

(2) أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ . هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0؟

ب- احسب  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x - 3}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)}{x - 3}$ . هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 3؟

(3) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

(4) ليكن  $C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، الوحدة  $1cm$

استنتج من السؤالين (1) و (2).

✳ المستقيم الذي معادلته  $y = x - 4$  مقارب للمنحني  $C_f$ .

✳ يقبل المنحني  $C_f$  نصفى مماسين في النقطة ذات الفاصلة 0.

✳ يقبل المنحني  $C_f$  نصفى مماسين في النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) ارسم  $C_f$

(6) ناقش بيتايا، تبعا للوسيط  $m$ ، عدد حلول المعادلة الآتية :

$$|x^2 - 3x| = m(x + 1) \quad \text{حل المعادلة في حالة } m = 1.$$

## الحل

(1) مجموعة تعريف الدالة  $f$ 

مجموعة التعريف : تكون الدالة  $f$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $x + 1 \neq 0$ ، أي  $x \neq -1$

ومنه مجموعة تعريف  $f$  هي :  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$

$f(x)$  بدون قيمة مطلقة : بعد دراسة إشارة  $x^2 - 3x$  نكتب عبارة  $f(x)$  بدون القيمة

المطلقة كما في الجدول الآتي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$3$	$+\infty$
$x(x - 3)$	+	+	0	-	+
$f(x)$	$\frac{x^2 - 3x}{x + 1}$	$\frac{x^2 - 3x}{x + 1}$	$\frac{-x^2 + 3x}{x + 1}$	$\frac{x^2 - 3x}{x + 1}$	

إذن

من أجل كل  $x$  من المجال  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]3, +\infty[$ ،  $f(x) = x - 4 + \frac{4}{x + 1}$

ومن أجل كل  $x$  من المجال  $[0, 3]$ ،  $f(x) = -x + 4 - \frac{4}{x + 1}$

$$(2) \text{ حساب النهايتين } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x - 3)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(x - 3)}{x + 1} = 3$$

إذن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 من اليمين هو 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x - 3)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 3}{x + 1} = -3$$

إذن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 من اليسار هو -3.

والخلاصة، بما أن العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 من اليمين لا يساوي العدد المشتق للدالة  $f$  من اليسار عند 0 فإن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x + 1} = \frac{3}{4}$$

إذن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 3 من اليمين و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 3 من اليمين هو  $\frac{3}{4}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x}{x+1} = -\frac{3}{4}$$

إذن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 3 من اليسار و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 3 من اليسار هو  $-\frac{3}{4}$

والخلاصة، بما أن العدد المشتق للدالة  $f$  عند 3 من اليمين لا يساوي العدد المشتق للدالة  $f$  من اليسار عند 3 فإن الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند 3.

#### (3) دراسة تغيرات الدالة $f$

##### النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

الدالة المشتقة لاحظ أن لعبارة الدالة شكلين فاختر أنسبهما لحساب الدالة المشتقة

من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]3, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

وإشارة  $f'(x)$ ، في هذه الحالة، من إشارة  $x^2+2x-3$  وهو كثير حدود من الدرجة الثانية له جذران هما: 1، -3.

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}, \text{ و من أجل كل } x \text{ من } ]0, 3]$$

وإشارة  $f'(x)$ ، في هذه الحالة، من إشارة  $-x^2-2x+3$  وهو كثير حدود من الدرجة الثانية له جذران هما: 1، -3.

وملخص إشارة  $f'(x)$  في الجدول الآتي:

$x$	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	-	+ 0 -	+

#### جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	-	+ 0 -	+
$f(x)$		$-\infty$	-9	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

#### (4) الاستنتاج

بما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x-4)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0$  فإن المستقيم الذي معادلته

$y = x - 4$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$ .

ومن المفيد: ملاحظة أن المنحنى  $C_f$  يقبل مستقيماً مقارباً آخر عمودياً معادلته  $x = -1$ .

بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين، فإن المنحنى  $C_f$  يقبل نصف مماس من اليمين معامل توجيهه 3.

وبما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 على اليسار، فإن المنحنى  $C_f$  يقبل نصف مماس من اليسار معامل توجيهه -3.

والخلاصة: يقبل المنحنى  $C_f$  نصفين مماسين في النقطة ذات الفاصلة 0.

بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 3 على اليمين، فإن المنحنى  $C_f$  يقبل نصف مماس

من اليمين معامل توجيهه  $\frac{3}{4}$ .

وبما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 3 على اليسار، فإن المنحنى  $C_f$  يقبل نصف مماس

من اليسار معامل توجيهه  $-\frac{3}{4}$ .

والخلاصة: يقبل المنحنى  $C_f$  نصفين مماسين في النقطة ذات الفاصلة 3.

#### (5) رسم $C_f$ وخطواته هي:

نرسم المستقيمين المقاربين.

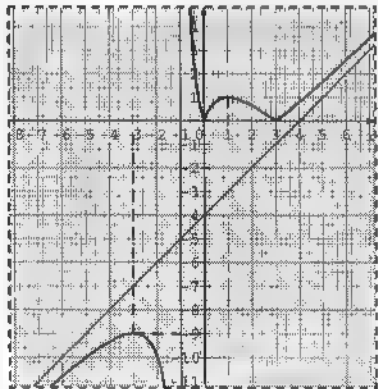
نرسم النقط التي إحداثياتها:

$(-3, -9)$  و  $(0, 0)$  و  $(1, 1)$  و  $(3, 0)$

(بملاحظة جدول التغيرات)

نرسم  $C_f$  على المجال  $D_f$  بتوجيه

من جدول التغيرات.



$$(3) \text{ تحقق من أنه من كل عدد } x \text{ من } D_f, f'(x) = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}$$

✳ ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

(4) برهن أن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$  الممثل للدالة  $f$

✳ ادرس وضعية المنحنى  $C_f$  بالنسبة إلى المقارب المائل  $D$ .

(5) ارسم  $C_f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(6) باستعمال المنحنى  $C_f$ , ناقش عدد الحلول - في  $\mathbb{R}$  - للمعادلة :

$$x^3 - (2+m)x^2 + 2mx - m = 0$$

حيث  $m$  وسيط حقيقي.



### (1) مجموعة تعريف الدالة $f$

مجموعة التعريف : تكون الدالة  $f$  معرفة إذا فقط إذا كان  $x - 1 \neq 0$ , أي  $x \neq 1$

ومنه مجموعة تعريف  $f$  هي :  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

### (2) الشكل الجديد لـ $f(x)$

من أجل كل  $x$  من  $D_f$ ,

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} &= \frac{ax(x^2 - 2x + 1) + b(x-1) + c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 - 2ax^2 + (a+b)x - b + c}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \text{ وبالتالي وبالمطابقة مع } f(x) \text{ نجد } \begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases}$$

$$\text{ويكون لدينا } f(x) = x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

### (3) الدالة المشتقة للدالة $f$

من أجل كل  $x$  من  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(7) تعيين عدد حلول المعادلة الآتية :  $|x^2 - 3x| = m(x+1)$

$$\text{لدينا } |x^2 - 3x| = m(x+1) \text{ ومن أجل } x \neq -1, \text{ نجد } \frac{|x^2 - 3x|}{x+1} = m$$

ومنه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $C_f$  مع المستقيم الذي

معادلته  $y = m$  (وهو مستقيم أفقي) حيث  $m$  عدد حقيقي. وإليك عدد الحلول

ملخصة في الجدول الآتي :

$m$	$-\infty$	$-9$	$0$	$1$	$+\infty$
عدد الحلول	2	(1)	0	(2)	4

حل المعادلة في حالة  $m = 1$

لنحل المعادلة  $f(x) = 1$  على  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$

حسب النتائج السابقة لدينا

$$\frac{x^2 - 3x}{x+1} = 1, \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]3, +\infty[$$

وبالتالي نحصل على المعادلة :  $x^2 - 4x - 1 = 0$  ولهذه المعادلة حلان هما

$$-0.23 \approx -\sqrt{5} - 2, \quad 4.23 \approx \sqrt{5} + 2 \text{ وهما حلان مقبولان.}$$

$$\text{ومن أجل كل } x \text{ من المجال } [0, 3], \frac{-x^2 + 3x}{x+1} = 1$$

وبالتالي نحصل على المعادلة :  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ولهذه المعادلة حل مضاعف هو 1

وهو حل مقبول.

والخلاصة أن للمعادلة  $|x^2 - 3x| = x + 1$  (في حالة  $m = 1$ ) ثلاثة حلول هي :

$$-0.23 \approx -\sqrt{5} - 2, \quad 1, \quad 4.23 \approx \sqrt{5} + 2$$

### التمرين 36

$$\text{لنتكن } f \text{ الدالة المعرفة كما يلي : } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

(1) عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

$$(2) \text{ برهن أنه يمكن وضع } f(x) \text{ على الشكل الآتي : } f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.



دراسة وضعية المنحني  $C_f$  بالنسبة إلى المقارب المائل  $D$ .

دراسة وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى  $D$ ، ندرس إشارة الفرق  $f(x) - x$

نلاحظ أن إشارة الفرق  $f(x) - x = \frac{-x}{(x-1)^2}$  من إشارة  $(-x)$ .

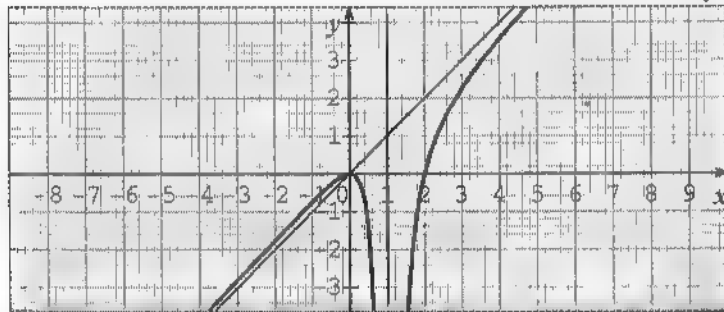
$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة الفرق		+	-
الوضعية	$C_f$ فوق $D$	$C_f$ تحت $D$	

(5) رسم  $C_f$  وخطواته هي:

نرسم المستقيمين المقاربين.

نرسم النقطة التي إحداثياتها:  $(0,0)$  (بملاحظة جدول التغيرات) و  $(2,0)$ .

نرسم  $C_f$  بتوجيه من جدول التغيرات.



(7) تعيين عدد حلول المعادلة الآتية:  $x^3 - (2+m)x^2 + 2mx - m = 0$ .

لدينا  $x^3 - (2+m)x^2 + 2mx - m = 0$  ومنه  $x^3 - 2x^2 = m(x^2 - 2x + 1)$

$$\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = m, \quad D_f \text{ من } x \text{ كل } x$$

والخلاصة: حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحني  $C_f$  مع المستقيم الذي

معادلته  $y = m$  (وهو مستقيم أفقي) حيث  $m$  عدد حقيقي. وإليك عدد الحلول

ملخصة في الجدول الآتي:

$m$	$-\infty$	0	$+\infty$
عدد الحلول	1	(2)	3

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^4 + (x-1)^2 + 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)^3 + (x-1) + 2}{(x-1)^3} = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}$$

دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

بما أن المقام موجب تماماً  
يكفي أن نحسب  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$$

إشارة مشتقة الدالة  $f$ :

نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $x^2 - 3x + 4 > 0$ ,  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

وبالتالي إشارة  $f'(x)$  من إشارة الجداء  $x(x-1)$ , وإليك ملخصاً لإشارتها:

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x(x-1)$		+	-	+

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

(4) المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحني

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = 0$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 0$  فإن المستقيم  $D$  الذي

معادلته  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$ .

ومن المفيد استنتاج أن المستقيم ذا المعادلة  $x = 1$  مقارب، أيضاً، للمنحني  $C_f$  لأن

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$= \frac{ax^3 - 2ax^2 + (a+b)x - b + c}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=2 \\ -b+c=-4 \end{cases} \text{ نجد } f(x) \text{ وبالمطابقة مع}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} \text{ ويكون لدينا}$$

(3) الدالة المشتقة للدالة f

من أجل كل x من  $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$   $D_f =$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^4 - (x-1)^2 + 6(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)[(x-1)^3 - (x-1) + 6]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 + 2x + 6)}{(x-1)^4}$$

نلاحظ أن  $-1$  جذر لكثير الحدود  $(x^3 - 3x^2 + 2x + 6)$  وبالتالي فهو يكتب على الشكل  $(x+1)(x^2 - 4x + 6)$  ويتعويضه في العلاقة السابقة نجد :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 6)}{(x-1)^4}$$

دراسة تغيرات الدالة f.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty$$

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

بما أن المقام موجب تماما يكفي أن نحسب  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$$

إشارة مشتقة الدالة f :

نلاحظ أنه من أجل كل x من  $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$   $D_f =$   $x^2 - 4x + 6 > 0$

التمرين 37

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{(x-1)^2} \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة كما يلي :}$$

وليكن  $C_f$  المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
(1) عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \text{ : على الشكل الآتي :}$$

حيث a , b , c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 6)}{(x-1)^4} \text{ , } D_f \text{ من أجل كل } x \text{ من } D_f \text{ تحقق من أنه من أجل كل عدد } x \text{ من } D_f$$

ادرس تغيرات الدالة f.

(4) برهن أن للمنحني  $C_f$  مقاربين أحدهما مائل D .

ادرس وضعية المنحني  $C_f$  بالنسبة إلى المقارب المائل D .

(5) اكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحني  $C_f$  في النقطة التي فاصلتها 2 .

(6) ارسم  $(\Delta)$  ثم  $C_f$ .

(7) باستعمال المنحني  $C_f$  , اشرح كيف يمكن رسم  $C_g$  المنحني الممثل للدالة g المعرفة

$$g(x) = \frac{|x-2|(x^2+2)}{(x-1)^2} \text{ كما يلي : ارسم } C_g \text{ في نفس المعلم .}$$

الحل

(1) مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة التعريف : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان  $(x-1) \neq 0$  أي  $x \neq 1$

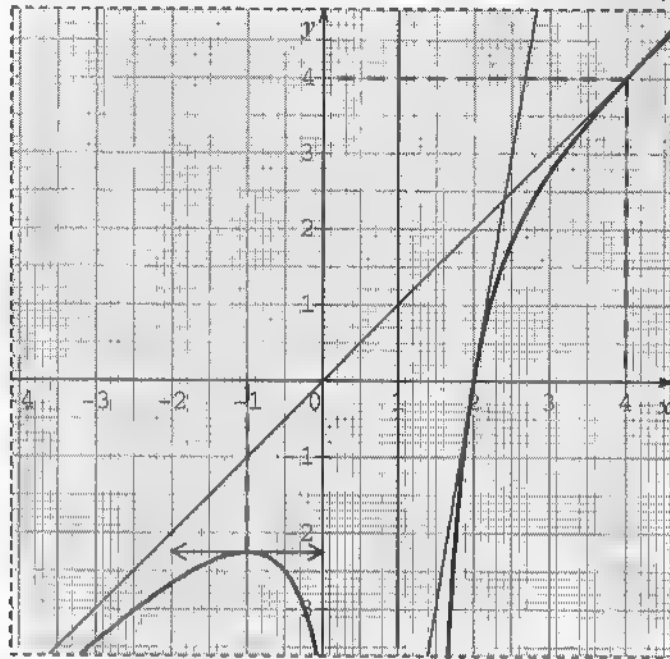
ومنه مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(2) الشكل الجديد لـ f

من أجل كل x من  $D_f$  ,

$$ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{ax(x^2 - 2x + 1) + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

- ✧ نرسم النقطة التي إحداثياتها:  $(-1, -\frac{9}{4})$  (بملاحظة جدول التغيرات) و  $(0, -4)$ .
- ✧ نرسم  $C_r$  بتوجيه من جدول التغيرات، والتقدير بنتائج دراسة الوضعية السببية.



رسم C

✧ لنكتب العبارة  $f(x)$  بدون القيمة المطلقة كما يلي:

$$g(x) = -\frac{(x-2)(x^2+2)}{(x-1)^2}, \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } ]-\infty, 1[ \cup ]1, 2]$$

وبنتج أن  $g(x) = -f(x)$  وبالتالي  $C_g$  يناظر  $C_r$  بالنسبة إلى محور الفواصل.

$$g(x) = -\frac{(x-2)(x^2+2)}{(x-1)^2} = f(x), \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } [2, +\infty[$$

وبنتج أن  $C_g$  ينطبق على  $C_r$ .

✧ لنرسم  $C_g$  في المعلم السابق.

وبالتالي إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x^2 - 1$ ، وإليك ملخصاً لإشارته:

$x$	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	+

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{9}{4}$	$-\infty$	$+\infty$

(4) المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحنى

✧ بما أن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} \right] = 0$  فإن المستقيم  $D$  الذي

معادلته  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_r$ .

✧ وبما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$  فإن المستقيم الذي معادلته  $x = 1$  مقارب للمنحنى  $C_r$ .

✧ دراسة وضعية المنحنى  $C_r$  بالنسبة إلى المقارب المائل  $D$ .

لدراسة وضعية  $C_r$  بالنسبة إلى  $D$ ، ندرس إشارة الفرق  $f(x) - x$ .

نلاحظ أن إشارة الفرق  $f(x) - x = \frac{x-4}{(x-1)^2}$  من إشارة  $(x-4)$ .

$x$	$-\infty$	4	$+\infty$
إشارة الفرق	-	0	+
الوضعية	$C_r$ فوق $D$	$C_r$ تحت $D$	$C_r$ فوق $D$

(5) كتابة معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $C$  في النقطة التي فاصلتها 2.

تذكر أن الشكل العام لمعادلة المماس لمنحنى في نقطة منه فاصلتها  $a$  هو:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ ومنه معادلة مماسنا هي } y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

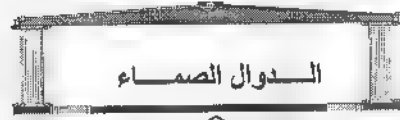
وبالتعويض نجد  $y = 6x - 12$ .

(6) رسم  $(\Delta)$  وخطواته هي:

✧ نرسم المماس  $(\Delta)$  باختيار نقطتين أو ثلاث، وهو الأفضل، منه.

✧ نرسم المستقيمين المقاربين.

بما أن الدالة تقبل الاشتقاق عند 0 فإن المنحني  $C_r$  يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجييه -2.



التمرين 39

ادرس اتجاه تغير الدوال الآتية ثم ارسم المنحنيات الممثلة لها في معلم متعامد ومتجانس.

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad \dots(1) \quad , \quad f(x) = \sqrt{-3x+5} \quad \dots(2)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x+3} \quad \dots(3) \quad , \quad f(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1} \quad \dots(4)$$

الحل

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad \dots(1)$$

لندرس اتجاه التغير أولا:

$$(أ) \text{ مجموعة التعريف : الدالة معرفة على المجال } \left[ +\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$(ب) \text{ حساب النهايات : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(ج) الدالة المشتقة :

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } \left[ +\frac{1}{2}, +\infty \right[ \quad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} \quad \text{ وإشارته موجبة.}$$

(د) جدول التغيرات :

$x$	$+\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

نرسم المنحني المقابل للدالة /

المعلم المختار متعامد ومتجانس.  
دراسة الفروع اللانهائية :

في جوار  $+\infty$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) للمنحني  $C_r$  مستقيمان مقاربان

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-x+1} = 0 \text{ فإن المستقيم الذي معادلته}$$

$$y = x - 4 \text{ مستقيم مقارب للمنحني } C_r.$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \text{ فإن المستقيم الذي معادلته}$$

$$y = x - 4 \text{ مستقيم مقارب للمنحني } C_r.$$

$$\text{من أجل كل } x \geq 0, \quad f(x) - (x-3) = \frac{3}{x+1}$$

ونلاحظ أنه من أجل  $x \geq 0$ ,  $f(x) - (x-3) > 0$ , وتفسير هذه النتيجة هندسيا هو أن المنحني  $C_r$  يقع فوق المستقيم المقارب  $D$  ذي المعادلة  $y = x - 3$ .

$$\text{من أجل كل } x \leq 0, \quad f(x) - (1-x) = \frac{-1}{-x+1} = \frac{1}{x-1}$$

ونلاحظ أنه من أجل  $x \leq 0$ ,  $f(x) - (1-x) < 0$ , وتفسير هذه النتيجة هندسيا هو

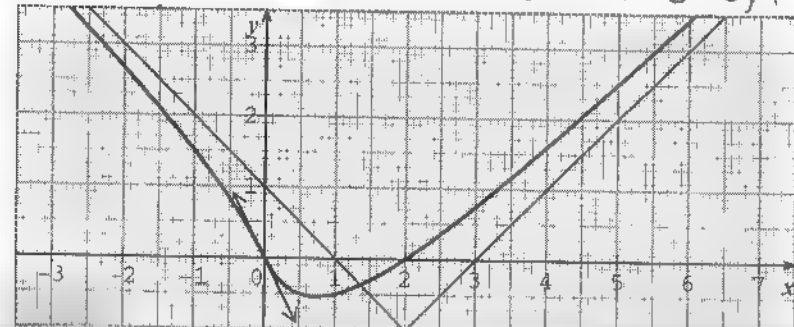
أن المنحني  $C_r$  يقع تحت المستقيم المقارب  $D'$  الذي معادلته  $y = -x + 1$ .

(4) رسم  $C_r$  وخطواته هي :

نرسم المستقيمين المقاربين .

نرسم النقط التي إحداثياتها:  $(0,0)$  (بملاحظة جدول التغيرات) و  $(2,0)$

نرسم  $C_r$  على المجال  $\mathbb{R}$  بتوجيه من جدول التغيرات.



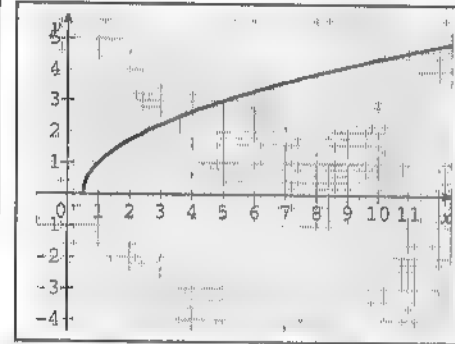
(أ) نحسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{2x-1}} = 0$$

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  فإن المنحني يقبل فرعاً من قطع مكافئ في اتجاه  $(x'y')$

◇ جدول القيم العددية :



$x$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+3$
$f(x)$	$0$	$+1$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \quad \dots (3)$$

ندرس اتجاه التغير أولاً :

(أ) مجموعة التعريف : الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty, +1[ \cup ]+3, +\infty[$ (ب) حساب النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ج) الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, +1[ \cup ]+3, +\infty[$ 

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

وإشارة الدالة المشتقة من إشارة  $(x-2)$  وبالتالي تكون إشارتها سالبة على  $]-\infty, +1[$ .وتكون موجبة على المجال  $] +3, +\infty[$ .

(د) جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$+1$	$+3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$0$	$+\infty$

ثم نرسم المنحني المقبول للدالة  $f$  :

◇ المعلم المختار متعاود ومتجانس.

◇ دراسة الفروع اللانهائية :

في جوار  $-\infty$ 

(أ) نحسب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = -1$$

(ب) نحسب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{+4x-3}{x - \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 4 - \frac{3}{x} \right)}{x \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = \frac{+4}{+1+1} = +2$$

(ج) يقبل المنحني مستقيماً مقارباً معادلته  $y = -x + 2$ في جوار  $+\infty$ 

(أ) نحسب

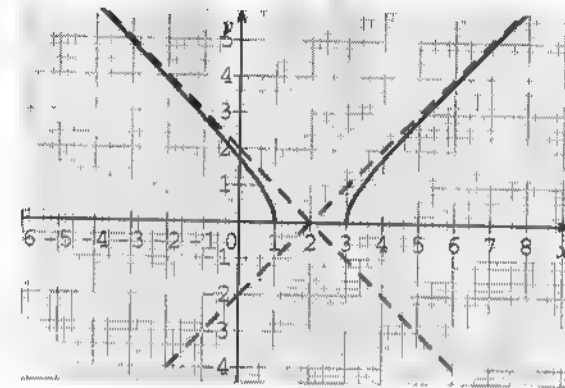
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( +\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = +1$$

(ب) نحسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+4x-3}{x - \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 4 - \frac{3}{x} \right)}{x \left( -1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = \frac{+4}{-1-1} = -2$$

(ج) يقبل المنحني مستقيما مقاربا معادلته  $y = x - 2$   
 جدول القيم العددية : نكتفي بما في جدول التغيرات.



## الدوال الأصلية

تكون  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على مجال  $I$  إذا كانت  $F$  قابلة للاشتقاق على  $I$  وكان من أجل كل  $x$  من  $I$  ،  $F'(x) = f(x)$ .

إذا كانت  $F_0$  دالة أصلية للدالة  $f$  على مجال  $I$  ، فإن كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على هذا المجال تكتب على الشكل الآتي :  $F(x) = F_0(x) + C$  ، حيث  $C$  ثابت حقيقي

كل دالة مستمرة على مجال  $I$  ، تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.

مثال : لتكن دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = -3x^2$ .

• بما أن الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ، فهي تقبل دوالا أصلية على  $\mathbb{R}$ .

• إحدى هذه الدوال، الدالة  $F$  المعرفة كما يلي :

$$F(x) = -x^3 \quad (\text{لأن من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} , F'(x) = f(x))$$

• الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي الدوال  $F$  المعرفة كما يلي :

$$F(x) = -x^3 + C \quad \text{حيث } C \text{ ثابت حقيقي.}$$

ملاحظة : يمكن تعيين إحدى هذه الدوال الأصلية بإعطاء شرط إضافي ، ففي هذا المثال ،

الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  والتي تتعدم من أجل  $x = 1$  ، هي الدالة  $F$  المعرفة كما يلي :

$$F(x) = -x^3 + 1 \quad (\text{لاحظ أن } C = 1 \text{ وننتج هذا عن حل المعادلة } F(1) = 0)$$

الدوال الأصلية للدوال المألوفة :

$f$ معرفة كما يلي :	الدوال الأصلية على $I$	$I$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}; n > 1)$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$

$$I = ]3, +\infty[, f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \quad (13) \quad I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \quad (12)$$

$$I = \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[, f(x) = \frac{2}{(3x-2)^2} \quad (14)$$

الحل

$f(x)$	$F(x)$	$I$
$3x - 4 \dots (1)$	$\frac{3}{2}x^2 - 4x + C$	$\mathbb{R}$
$2x^2 - 3x + 1 \dots (2)$	$\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$	$\mathbb{R}$
$x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{3} \dots (3)$	$\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + C$	$\mathbb{R}$
$(x-1)^2 \dots (4)$	$\frac{1}{3}(x-1)^3 + C$	$\mathbb{R}$
$-\frac{2}{x^2} \dots (5)$	$\frac{2}{x} + C$	$]0, +\infty[$
$1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \dots (6)$	$x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + C$	$]0, +\infty[$
$\frac{3}{\sqrt{x}} \dots (7)$	$6\sqrt{x} + C$	$]0, +\infty[$
$\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \dots (8)$	$\frac{-1}{x^2+x+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x-3}} \dots (9)$	$2\sqrt{x-3} + C$	$]3, +\infty[$
$\frac{2}{2} \times (2x-1)^3 \dots (10)$	$\frac{1}{8}(2x-1)^4 + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{2}{2}(x+1)(x^2+2x+3) \dots (11)$	$\frac{1}{4}(x^2+2x+3)^2 + C$	$\mathbb{R}$

القواعد العامة للدوال الأصلية :

$f(x)$	$F(x)$	أمثلة
$aU'(x) + bV'(x)$	$aU(x) + bV(x)$	$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ $F(x) = x^3 + x^2 + x + C$
$U'(x) \cdot [U(x)]^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) $\frac{1}{2} (2x+1)^3$	$\frac{[U(x)]^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = 3(3x+1)^2$ $F(x) = \frac{(3x+1)^3}{3} + C$
$\frac{U'(x)}{[U(x)]^n}$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) ( $n > 1, U(x) \neq 0$ )	$\frac{-1}{(n-1)[U(x)]^{n-1}} + C$	$f(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ $F(x) = \frac{-1}{x^3+1} + C$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ ( $U(x) > 0$ )	$2\sqrt{U(x)} + C$	$f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$ $F(x) = 2\sqrt{3x+2} + C$

التمرين 40

عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  في الحالات الآتية :

$$I = \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad (2) \quad I = \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2 \quad (4) \quad I = \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$I = ]0, +\infty[, f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \quad (6) \quad I = ]0, +\infty[, f(x) = -\frac{2}{x^2} \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \quad (8) \quad I = ]0, +\infty[, f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad (7)$$

$$I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{2}(2x-1)^3 \quad (10) \quad I = ]3, +\infty[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad (9)$$

$$I = \mathbb{R}, f(x) = (x+1)(x^2+2x+3) \quad (11)$$



التمرين 42

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $]2, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2}$

(1) من أجل كل  $x$  من  $]2, +\infty[$  , عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$$

(2) استنتج دالة أصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $]2, +\infty[$  بحيث  $F(3) = 1$

الحل

(1) من أجل كل  $x$  من  $]2, +\infty[$  ,

$$a + \frac{b}{(x-2)^2} = \frac{a(x^2 - 4x + 4) + b}{(x-2)^2} = \frac{ax^2 - 4ax + 4a + b}{(x-2)^2}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ -4a = -8 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

ويكون لدينا  $f(x) = 2 - \frac{8}{(x-2)^2}$

(2) الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]2, +\infty[$  هي :  $F(x) = 2x + \frac{8}{x-2} + C$

وبما أن  $F(3) = 1$  فإن  $C = -13$  , وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط

$$x \mapsto 2x + \frac{8}{x-2} - 13 \text{ المطلوب هي:}$$

التمرين 43

عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى تكون الدالة  $F$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = (ax + b)\sqrt{3x + 5} \text{ الدالة } F(x) = (ax + b)\sqrt{3x + 5} \text{ دالة أصلية , على المجال } ]-\frac{5}{3}, +\infty[$$

$\frac{4}{4} \times \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \dots (12)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 1}$	$\mathbb{R}$
$-\left[\frac{1}{(x-3)^2}\right] \dots (13)$	$\frac{1}{x-3} + C$	$]3, +\infty[$
$\frac{3}{3} \times \frac{2}{(3x-2)^2} \dots (14)$	$\frac{-2}{3(3x-2)} + C$	$\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

التمرين 41

عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $I$  والتي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية .

(1)  $I = \mathbb{R}$  ,  $F(0) = 1$  ,  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

(2)  $I = \mathbb{R}$  ,  $F(1) = 1$  ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(3)  $I = ]1, +\infty[$  ,  $F(2) = 0$  ,  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

الحل

(1) الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$

وبما أن  $F(0) = 1$  فإن  $C = 1$  , وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط المطلوب هي:

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

(2) الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي :  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$

وبما أن  $F(1) = 1$  فإن  $C = 1 - \sqrt{2}$  , وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + 1 - \sqrt{2} \text{ المطلوب هي:}$$

(3) الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]1, +\infty[$  هي :  $F(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + C$

وبما أن  $F(2) = 0$  فإن  $C = 1$  , وبالتالي الدالة الأصلية التي تحقق الشرط

$$x \mapsto -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \text{ المطلوب هي:}$$

المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{3x+5}$

الحل

إذا كانت  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right]$  فإن  $F$  قابلة للاشتقاق على هذا المجال

ولدينا من أجل كل  $x$  من  $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right]$  ،  $F'(x) = f(x)$  ، وبالتالي

$$\sqrt{3x+5} = a(\sqrt{3x+5}) + \frac{3(ax+b)}{2\sqrt{3x+5}}$$

$$\sqrt{3x+5} = \frac{9ax+10a+3b}{2\sqrt{3x+5}}$$

$$\text{وبالمطابقة نجد أن } a = \frac{2}{3} \text{ و } b = \frac{10}{9}$$

التمرين 44

عين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  حتى تكون الدالة  $F$  المعرفة كما يلي :

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-x}$$

المعرفة كما يلي :  $f(x) = x\sqrt{1-x}$

الحل

إذا كانت  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-\infty, 1[$  فإن  $F$  قابلة للاشتقاق على هذا المجال

ولدينا من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, 1[$  ،  $F'(x) = f(x)$  ، وبالتالي

$$x\sqrt{1-x} = (2ax+b)(\sqrt{1-x}) - \frac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{1-x}}$$

$$x\sqrt{1-x} = \frac{-5ax^2 + (4a-3b)x + 2b-c}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\text{وبتوحيد مقامي الطرف الأول نجد } -2x^2 + 2x = -5ax^2 + (4a-3b)x + 2b-c$$

$$\text{وبالمطابقة نجد أن } a = \frac{2}{5} \text{ و } b = \frac{-2}{15} \text{ و } c = \frac{-4}{15}$$

التمرين 45

ينتج مصنع 5000 وحدة كحد أقصى، الكلفة الهامشية  $C_m(x)$  لإنتاج  $x$  وحدة ( $x$  بالآلاف) تعطى بالدستور الآتي :

$$C_m(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 4$$

(1) إن الكلفة الهامشية هي الدالة المشتقة (بالمحاكاة) للكلفة الإجمالية  $C_T(x)$  .

عين  $C_T(x)$  علما أن  $C_T(0) = 45$  .

(2) استنتج ، بدلالة  $x$  ، الكلفة المتوسطة  $C_M(x)$  والمعرفة كما يلي :  $C_M(x) = \frac{C_T}{x}$

الحل

(1) بما أن الكلفة الهامشية  $C_m(x)$  هي مشتقة الدالة التي ترفق بكل كمية  $x$  ، الكلفة الإجمالية  $C_T(x)$  ، فإن  $C_T(x)$  هي الدالة الأصلية للدالة التي ترفق بكل كمية  $x$  ، الكلفة

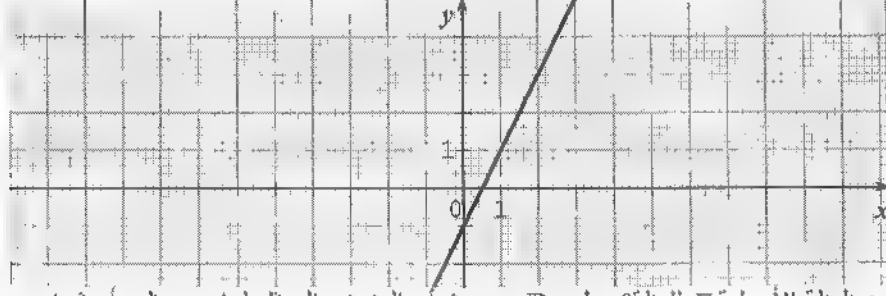
الهامشية  $C_m(x)$  على المجال  $[0, 5]$  ، وبالتالي  $C_T(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4x + C$

$$\text{وبما أن } C_T(0) = 45 \text{ فإن } C_T(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4x + 45$$

$$(2) \text{ بما أن : } C_M(x) = \frac{C_T}{x} \text{ فإن } C_M(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4 + \frac{45}{x}$$

التمرين 46

يمثل المستقيم المرسوم في الشكل الآتي ، المنحني الممثل لدالة تاليفية  $f$



عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، بحيث أن المنحني الممثل لها يمر بالمبدأ ، ثم ارسم

هذا المنحني في هذا الشكل .

الحل

لاحظ أن المستقيم المرسوم في الشكل يمر بالنقطتين  $(0, -1)$  و  $(1, 1)$ . وبما أن عبارة الدالة

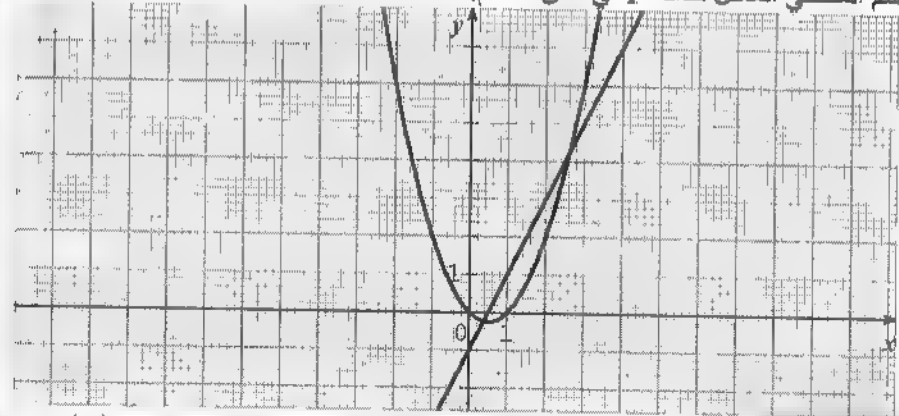
التألفية  $f$  تكتب على الشكل  $f(x) = ax + b$ , فإن  $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$  وبالتالي

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} -1 = a(0) + b \\ 1 = a(1) + b \end{cases} \text{ وعبرة } f \text{ هي } f(x) = 2x - 1$$

الدوال الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي :  $F(x) = x^2 - x + C$

وبما أن المنحني الممثل للدالة  $F$  يمر بالمبدأ , فإن  $F(0) = 0$  ومنه  $F(x) = x^2 - x$

رسم المنحني الممثل للدالة  $F$  في نفس المعلم.



الدالة الأسية هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية  $y' = y$  الذي يحقق  $y(0) = 1$ .

ونرمز إليها بالرمز  $\exp$ . ونكتب  $x \mapsto \exp(x)$

تعريف آخر : توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ , بحيث

$$f'(x) = f(x) \text{ و } f(0) = 1$$

نسُميها : "الدالة الأسية" ونرمز إليها بالرمز  $\exp$

نتائج :

$$\exp(0) = 1$$

الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $\exp'(x) = \exp(x)$

الدوال الأصلية للدالة الأسية على  $\mathbb{R}$  هي  $x \mapsto \exp(x) + C$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ,  $\exp(x) > 0$ .

الدالة الأسية متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

اصطلاح : نضع  $e = \exp(1)$ , باستعمال الآلة الحاسبة نجد  $e \approx 2.718$

الخواص الجبرية : من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  (تحول الدالة الأسية المجموع إلى جداء)

$$\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} \text{ و } \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n \text{ حيث } n \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)} \text{ حيث } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ و } n > 1$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\exp(1)} = \sqrt{e} \text{ حالة خاصة}$$

الترميز  $e^x$  : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ , نصطلح على أن  $\exp(x) = e^x$

النهايات

① السلوك التقاربي

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , يقبل المنحني الممثل للدالة الأسية , في  $-\infty$ , مستقيما مقاربا أفقيا

هو محور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ , } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ , يقبل المنحني الممثل للدالة الأسية , في } +\infty$$

فرعا من قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب .

② التقريب التآلفي للدالة الأسية عند الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ , وبالتالي فالدالة } x \mapsto 1+x \text{ هي أفضل تقريب تآلفي للدالة الأسية}$$

عند 0. ومن أجل  $x$  قريبة من 0 نكتب  $e^x \approx 1+x$

③ التزايد المقارن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ . (سيأتي مفصلا)

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $a$ ، للمعادلة  $e^x = a$  حل وحيد، في  $\mathbb{R}$ ، نرمز إليه بالرمز  $\ln a$  (اللوغاريتم النيبيري للعدد  $a$ ) ونتيجة لهذا إن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية دالة عكسية للدالة الأسية.

خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية تستنتج من خواص الدالة الأسية

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على المجال  $]0, +\infty[$ .

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما  $x$  و  $y$ ،  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما  $x$  و  $y$ ،  $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ .

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$ ،  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ .

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$ ، وكل  $n$  من  $\mathbb{Q}$ ،  $\ln x^n = n \ln x$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $\ln e^x = x$ .

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$ ،  $e^{\ln x} = x$ .

تتعدم الدالة اللوغاريتمية عند 1،  $\ln 1 = 0$ ، ولدينا، أيضا،  $\ln e = 1$ .

إشارة  $\ln x$

من أجل كل  $x$  من المجال  $]0, 1[$ ،  $\ln x < 0$ .

من أجل كل  $x$  من المجال  $]1, +\infty[$ ،  $\ln x > 0$ .

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

يقبل المنحنى الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية فرعا من قطع

مكافئ في اتجاه محور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

يقبل المنحنى الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية مستقيما مقاربا

عموديا معادلته  $x = 0$  (محور الترتيب)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^r \ln x = 0, \text{ ومن أجل كل } r > 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية النيبيرية من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$ ،  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .

الدالة  $\ln$  متزايدة على  $]0, +\infty[$ ، و من أجل كل عددين حقيقيين من هذا المجال

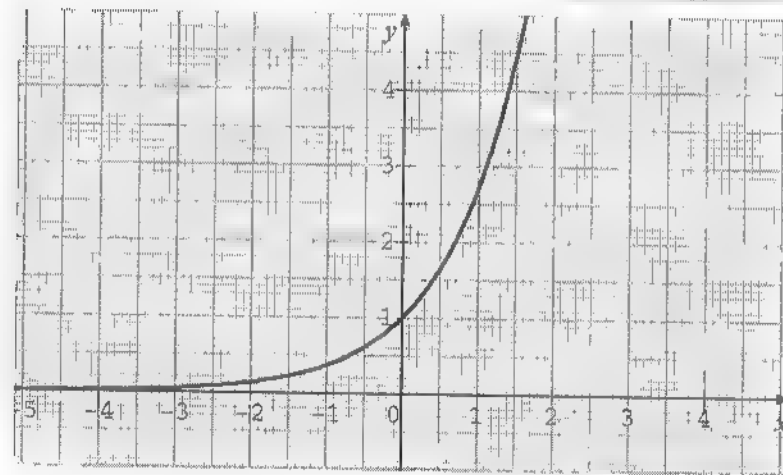
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

لاحظ أن في اللانهاية، تتفوق الدالة الأسية على "الدالة قوة"

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = e^x$		+	
$\exp(x) = e^x$	0	1	$+\infty$

المنحنى الممثل للدالة الأسية



الدالة المشتقة للدالة  $e^x$  حيث  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

إن الدالة المركبة  $e^u$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  ولدينا

مثال الدالة  $1 - 2x^2$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $x \mapsto e^{1-2x^2}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $x \mapsto -4xe^{1-2x^2}$ .

نتيجة: الدوال الأصلية للدالة  $e^{u(x)}$  هي  $x \mapsto u'(x)$  على مجال  $I$  هي  $x \mapsto e^{u(x)}$ .

يكون لدينا  $x < y$  إذا وفقط إذا كان  $\ln x < \ln y$ .

ويكون لدينا  $x = y$  إذا وفقط إذا كان  $\ln x = \ln y$ .

الدالة المشتقة للدالة  $\ln u$  حيث  $u$  دالة موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$

إن الدالة المركبة  $\ln u$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

ولدينا

مثال الدالة  $x \mapsto -x^2 + 1$  موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على  $]-1, +1[$ .

الدالة  $x \mapsto \ln(-x^2 + 1)$  قابلة للاشتقاق على  $]-1, +1[$  ودالتها المشتقة

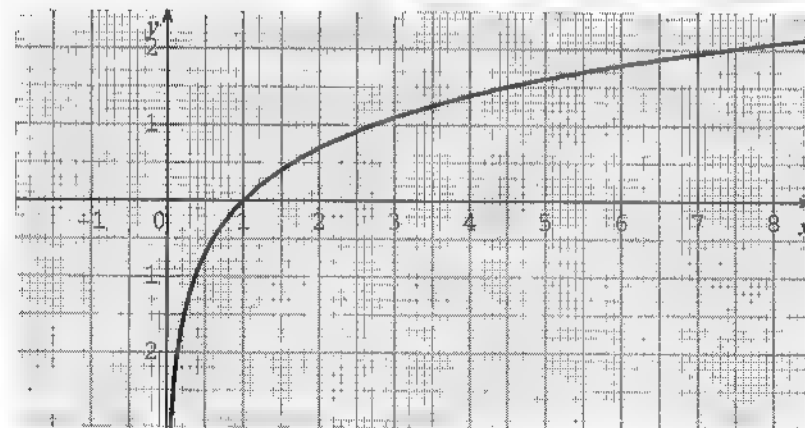
$$x \mapsto \frac{-2x}{-x^2 + 1}$$

نتيجة: الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  على مجال  $I$  هي  $x \mapsto \ln|u(x)|$

الدالة اللوغاريتمية العشرية هي الدالة التي يُرمز إليها بالرمز  $\log$  والمعرفة على  $]0, +\infty[$

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

المنحنى الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية



### تمارين على الدالة الأسية

التمرين 47

حل  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

$$e^x + 1 = 0 \quad (3) \quad e^{x+2} = 1 \quad (2) \quad e^x = 3 \quad (1)$$

$$e^{2x} - 3e^x = 0 \quad (6) \quad e^{x^2-x-1} = e \quad (5) \quad e^{3x} = 8e^x \quad (4)$$

$$e^x = 3 - e^x \quad (9) \quad e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 = 0 \quad (8) \quad e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} = 1 \quad (12) \quad e^{2x} + 4e^{-2x} = 4 \quad (11) \quad e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0 \quad (10)$$

الحل

$$\ln e^x = \ln 3 \quad \text{تكافئ} \quad e^x = 3 \quad (1) \quad \text{تكافئ} \quad x = \ln 3 \quad \text{ومنه} \quad \text{مجموعة حلول المعادلة هي } \{\ln 3\}$$

$$\ln e^{x+2} = \ln 1 \quad \text{تكافئ} \quad e^{x+2} = 1 \quad (2) \quad \text{تكافئ} \quad x + 2 = 0$$

$$\text{أي} \quad x = -2 \quad \text{ومنه} \quad \text{مجموعة حلول المعادلة هي } \{-2\}$$

$$e^x + 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad e^x = -1 \quad (3) \quad \text{إذن ليس للمعادلة حلول}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\emptyset$ .

$$\ln e^{3x} = \ln 8e^x \quad \text{تكافئ} \quad e^{3x} = 8e^x \quad (4) \quad \text{تكافئ} \quad \ln e^{3x} = \ln 8 + \ln e^x$$

$$3x = \ln 8 + x \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{أي} \quad x = \frac{\ln 8}{2} \quad \text{ومنه} \quad \text{مجموعة حلول المعادلة هي } \left\{ \frac{\ln 8}{2} \right\}$$

$$\ln e^{x^2-x-1} = \ln e \quad \text{تكافئ} \quad e^{x^2-x-1} = e \quad (5)$$

$$x^2 - x - 11 = 1 \quad \text{تكافئ}$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \text{(وهي معادلة من الدرجة الثانية)}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 47 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{المعادلة لها , إذن , حلان : } x_2 = \frac{1+7}{2} = 4, x_1 = \frac{1-7}{2} = -3$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{-3, 4\}$

$$(6) \quad e^{2x} = 3e^{-x} \quad \text{تكافئ} \quad \ln e^{2x} = \ln 3e^{-x}$$

$$2x = \ln 3 + \ln e^{-x} \quad \text{تكافئ}$$

$$2x = \ln 3 - x \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{أي } x = \frac{\ln 3}{3} \quad \text{ومنه مجموعة حلول المعادلة هي } \left\{ \frac{\ln 3}{3} \right\}$$

$$(7) \quad e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 6X + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 4 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{للمعادلة } X^2 - 6X + 8 = 0, \text{ إذن , حلان : } X_1 = \frac{6-2}{2} = 2, X_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 2, \text{ المعادلة } X = e^x \text{ تكافئ } e^x = 2$$

$$\text{أي } x = \ln 2$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 4, \text{ المعادلة } X = e^x \text{ تكافئ } e^x = 4$$

$$\text{أي } x = \ln 4$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{\ln 2, \ln 4\}$

$$(8) \quad e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 + 3X - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(1)(-10) = 49 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{للمعادلة } X^2 + 3X - 10 = 0, \text{ إذن , حلان : } X_1 = \frac{-3-9}{2} = -6$$

$$X_2 = \frac{-3+9}{2} = 3$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = -6, \text{ المعادلة } X = e^{\frac{x}{2}} \text{ تكافئ } e^{\frac{x}{2}} = -6$$

وهذه المعادلة , إذن , ليست لها حلول

$$\bullet \text{ من أجل } X = 3, \text{ المعادلة } X = e^{\frac{x}{2}} \text{ تكافئ } e^{\frac{x}{2}} = 3$$

$$\text{تكافئ } \frac{x}{2} = \ln 3$$

$$\text{أي } x = 2 \ln 4$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{2 \ln 4\}$

$$(9) \quad e^{-x} = 3 - e^x \quad \text{تكافئ} \quad 1 = 3e^x - e^{2x} \quad \text{(بضرب الطرفين في } e^x \text{)}$$

$$e^{2x} - 3e^x + 1 = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 3X + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1) = 5 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{للمعادلة } X^2 - 3X + 1 = 0, \text{ إذن , حلان : } X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \text{ المعادلة } X = e^x \text{ تكافئ } e^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{أي } x = \ln \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \text{ المعادلة } X = e^x \text{ تكافئ } e^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{أي } x = \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المعادلة هي } \left\{ \ln \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$(10) \quad e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} X = e^{2x} \\ X^2 - 13X + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(1)(36) = 25 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{للمعادلة } X^2 - 13X + 36 = 0, \text{ إذن , حلان : } X_1 = \frac{13-5}{2} = 4$$

$$X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 4, \text{ المعادلة } X = e^{2x} \text{ تكافئ } e^{2x} = 4$$

$$\text{تكافئ } 2x = \ln 4$$

$$\text{أي } x = \frac{\ln 4}{2}$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 9, \text{ المعادلة } X = e^{2x} \text{ تكافئ } e^{2x} = 9$$

$$2x = \ln 9 \text{ تكافئ}$$

$$x = \frac{\ln 9}{2} \text{ أي}$$

$$\left\{ \frac{\ln 4}{2}, \frac{\ln 9}{2} \right\} \text{ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي}$$

$$(11) \quad e^{2x} + 4e^{-2x} = 4 \text{ تكافئ } e^{4x} + 4 = 4e^{2x} \text{ (بضرب الطرفين في } e^{2x})$$

$$e^{4x} - 4e^{2x} + 4 = 0 \text{ تكافئ}$$

$$\begin{cases} X = e^{2x} \\ X^2 - 4X + 4 = 0 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0 \text{ وبالتالي}$$

$$\text{للمعادلة } X^2 - 4X + 4 = 0, \text{ إذن, حل مضاعف: } X = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{من أجل } X = 2, \text{ المعادلة } X = e^{2x} \text{ تكافئ } e^{2x} = 2$$

$$2x = \ln 2 \text{ تكافئ}$$

$$x = \frac{\ln 2}{2} \text{ أي}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المعادلة هي } \left\{ \frac{\ln 2}{2} \right\}$$

$$(12) \quad \text{تكون المعادلة } \frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} = 1 \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } e^{2x} - 4 \neq 0$$

$$e^{2x} \neq 4 \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

$$2x \neq \ln 4 \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

$$x \neq \frac{\ln 4}{2} \text{ أي}$$

$$\text{ومنه مجموعة تعريف المعادلة } \frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} = 1 \text{ هي } D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\ln 4}{2} \right\}$$

$$\text{من أجل } x \text{ من } D, \text{ بضرب الطرفين في } e^{2x} - 4 \text{ نجد } 3e^{2x} - 5e^x - 1 = e^{2x} - 4$$

$$\text{وهذه المعادلة تكافئ } 2e^{2x} - 5e^x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} X = e^x \\ 2X^2 - 5X + 3 = 0 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(3) = 1 \text{ وبالتالي}$$

$$\text{للمعادلة } 2X^2 - 5X + 3 = 0, \text{ إذن, حلان: } X_1 = \frac{5-1}{4} = 1, X_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 1, \text{ المعادلة } X = e^x \text{ تكافئ } e^x = 1$$

$$\text{أي } x = 0$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = \frac{3}{2}, \text{ المعادلة } X = e^x \text{ تكافئ } e^x = \frac{3}{2}$$

$$\text{أي } x = \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المعادلة هي } \left\{ 0, \ln \frac{3}{2} \right\}$$

## التمرين 48

حل  $\mathbb{R}$  المتراجحات الآتية:

$$(1) \quad e^x \geq 2 \quad (2) \quad e^{2x} \geq 3 \quad (3) \quad e^{-x} - 1 < 0$$

$$(4) \quad e^{3x} - 2 \leq 0 \quad (5) \quad e^{x^2} \geq 1 \quad (6) \quad e^{x^2} \geq e^x$$

$$(7) \quad e^{2x} - 3e^x + 2 > 0 \quad (8) \quad e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 \geq 0 \quad (9) \quad e^{x-1} \geq 1$$

## الحل

$$(1) \quad e^x \geq 2 \text{ تكافئ } \ln e^x \geq \ln 2$$

$$\text{تكافئ } x \geq \ln 2 \text{ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي } [\ln 2, +\infty[$$

$$(2) \quad e^{2x} \geq 3 \text{ تكافئ } \ln e^{2x} \geq \ln 3$$

$$\text{تكافئ } 2x \geq \ln 3 \text{ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي } \left[ \frac{\ln 3}{2}, +\infty[$$

$$(3) \quad e^{-x} - 1 < 0 \text{ تكافئ } \ln e^{-x} < \ln 1$$

$$\text{تكافئ } -x < 0$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي } ]0, +\infty[$$

$$(4) \quad e^{3x} - 2 \leq 0 \text{ تكافئ } \ln e^{3x} \leq \ln 2$$

$$\text{تكافئ } 3x \leq \ln 2$$

$$\text{أي } x \leq \frac{\ln 2}{3} \text{ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي } \left] -\infty, \frac{\ln 2}{3} \right]$$

$$(5) \quad e^{x^2} \geq 1 \text{ تكافئ } \ln e^{x^2} \geq \ln 1$$

$$\text{تكافئ } x^2 \geq 0 \text{ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي } \mathbb{R}$$

$$(6) \quad e^{x^2} \geq e^x \text{ تكافئ } \ln e^{x^2} \geq \ln e^x$$



$$\left(\frac{x}{e^2} + 5\right)\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right) \geq 0 \quad \text{تكافئ} \quad e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 \geq 0$$

وبما أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، فإن  $e^{\frac{x}{2}} + 5 > 0$  ،  
 المتراجحة  $e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 \geq 0$  تكافئ  $e^{\frac{x}{2}} - 2 \geq 0$   
 تكافئ  $e^{\frac{x}{2}} \geq 2$   
 أي  $x \geq 2 \ln 2$

فإن مجموعة حلول المتراجحة  $e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 \geq 0$  هي  $[2 \ln 2, +\infty[$

(9)  $e^{x-1} \geq 1$  تكافئ  $\ln e^{x-1} \geq 0$  ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي  $\mathbb{R}$  تكافئ  $|x-1| \geq 0$

### التمرين 49

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = e^x - 3x$

- ① عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  .
- ② ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$  .
- ③ عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

### الحل

#### ① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x) = +\infty - \infty$$

وهي حالة عدم التعيين ، ترفع بالطريقة الآتية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 3 \right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

#### ② دراسة تغيرات الدالة $f$

الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = e^x - 3$

ندرس إشارة  $e^x - 3$  بالطريقة الآتية :

•  $e^x - 3 = 0$  تكافئ  $e^x = 3$  أي  $x = \ln 3$  .

•  $e^x - 3 < 0$  تكافئ  $e^x < 3$  أي  $x < \ln 3$  .

$$x^2 \geq x \quad \text{تكافئ}$$

$$x(x-1) \geq 0 \quad \text{أي} \quad x^2 - x \geq 0$$

ندرس إشارة  $x(x-1)$  .

نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة هي :  $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$  .

$$\begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 3X + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad e^{2x} - 3e^x + 2 > 0 \quad (7)$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 \quad \text{لدينا}$$

لكثير الحدود  $X^2 - 3X + 2$  ، إذن ، جذران :  $X_1 = \frac{3-1}{2} = 1$  ،  $X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$  ،

$$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

ومن المتراجحة  $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$  تكافئ  $(e^x - 1)(e^x - 2) > 0$

ندرس إشارة  $(e^x - 1)(e^x - 2)$

$x$	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
$(e^x - 1)(e^x - 2)$	+	0	-	+

ومن مجموعة حلول المتراجحة  $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$  هي  $]-\infty, 0[ \cup ]\ln 2, +\infty[$

$$\begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 + 3X - 10 \geq 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad e^x + 3e^{\frac{x}{2}} - 10 \geq 0 \quad (8)$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(1)(-10) = 49 \quad \text{لدينا}$$

لكثير الحدود  $X^2 + 3X - 10$  ، إذن ، جذران :  $X_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$  ،  $X_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$

$$X^2 + 3X - 10 = (X+5)(X-2)$$

وبالتالي  $X^2 + 3X - 10 = (X+5)(X-2)$

•  $e^x - 3 > 0$  تكافئ  $e^x > 3$  أي  $x > \ln 3$ .

ومنه من أجل  $x$  من  $]-\infty, \ln 3[$  ،  $f'(x) < 0$  وبالتالي  $f$  متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل  $x$  من  $[\ln 3, +\infty[$  ،  $f'(x) > 0$  وبالتالي  $f$  متزايدة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$3(1 - \ln 3)$	$+\infty$

### الدوال الأصلية للدالة $f$

بما أن الدالة  $x \mapsto e^x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto e^x$  على  $\mathbb{R}$

و الدالة  $x \mapsto -\frac{3}{2}x^2$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto -3x$  على  $\mathbb{R}$

فإن الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي  $x \mapsto e^x - \frac{3}{2}x^2 + C$  ، حيث  $C$  ثابت حقيقي

### التمرين 50

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = -2x + 1 + e^x$ .

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

① عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

③ برهن أن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = -2x + 1$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$

ادرس وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى المستقيم  $D$  على  $\mathbb{R}$ .

④ عين معادلة للمماس  $T$  للمنحني  $C_f$  عند النقطة التي فاصلتها 0.

### الحل

### ① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

### ② دراسة تغيرات الدالة $f$

• الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = -2 + e^x$ .

درس إشارة  $-2 + e^x$  بالطريقة الآتية :

•  $e^x - 2 = 0$  تكافئ  $e^x = 2$  أي  $x = \ln 2$ .

•  $e^x - 2 < 0$  تكافئ  $e^x < 2$  أي  $x < \ln 2$ .

•  $e^x - 2 > 0$  تكافئ  $e^x > 2$  أي  $x > \ln 2$ .

ومنه من أجل  $x$  من  $]-\infty, \ln 2[$  ،  $f'(x) < 0$  وبالتالي  $f$  متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل  $x$  من  $[\ln 2, +\infty[$  ،  $f'(x) > 0$  وبالتالي  $f$  متزايدة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$3 - 2\ln 3$	$+\infty$

### ③ المستقيم المقارب والوضعية

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  فإن المستقيم  $D$  ذا المعادلة

$y = -2x + 1$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحني  $C_f$  عند  $-\infty$ .

• من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) - (-2x + 1) = e^x > 0$  (لأن  $e^x > 0$ )

إذن يقع  $C_f$  فوق  $D$ .

④ المماس  $T$  نحسب :  $f'(0) = -1$  ،  $f(0) = 2$

نعوض في المعادلة  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  فنجد  $y = -x + 2$

### التمرين 51

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ .

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

① عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

③ عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني  $C_f$  مع المستقيم  $D$  ذي المعادلة  $y = -3$

④ عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

• من أجل  $X = 3$  , المعادلة  $X = e^x$  تكافئ  $e^x = 3$   
أي  $x = \ln 3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{0, \ln 3\}$ .

إذن  $C_r$  يقطع المستقيم  $D$  في النقطتين  $A(0, -3)$  ,  $B(\ln 3, -3)$

#### الدوال الأصلية للدالة $f$

بما أن الدالة  $x \mapsto e^x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto e^x$  على  $\mathbb{R}$

و الدالة  $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto e^{2x}$  على  $\mathbb{R}$

فإن الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي  $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + C$  حيث  $C$  ثابت حقيقي

#### التمرين 52

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + e^{1-x}$ .

$C_r$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

① عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

③ برهن أن المستقيم  $D$  الذي معادلته  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_r$

ادرس وضعية  $C_r$  بالنسبة إلى المستقيم  $D$  على  $\mathbb{R}$ .

④ برهن على وجود نقطة  $A$  من المنحني  $C_r$  يكون فيها المماس  $T$  له معامل توجيه

يساوي  $-1$ . عين معادلة للمماس  $T$ .

⑤ عين دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

#### الحل

#### ① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = -\infty + \infty$$

وهذه حالة عدم تعيين , نرفعها بالطريقة الآتية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{e^{1-x}}{1-x} \times \frac{1-x}{x} \right) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1-x}}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = +\infty$$

#### الحل

#### ① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4e^x) = +\infty - \infty$$

وهي حالة عدم التعيين , نرفع بالطريقة الآتية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left( \frac{e^{2x}}{e^x} - 4 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 4) = +\infty$$

#### ② دراسة تغيرات الدالة $f$

⊗ الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x (e^x - 2)$

ندرس , فقط , إشارة  $e^x - 2$  ( لأن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $e^x > 0$  ) بالطريقة الآتية :

•  $e^x - 2 = 0$  تكافئ  $e^x = 2$  أي  $x = \ln 2$ .

•  $e^x - 2 < 0$  تكافئ  $e^x < 2$  أي  $x < \ln 2$ .

•  $e^x - 2 > 0$  تكافئ  $e^x > 2$  أي  $x > \ln 2$ .

ومنه من أجل  $x$  من  $]-\infty, \ln 2[$  ,  $f'(x) < 0$  وبالتالي  $f$  متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل  $x$  من  $]\ln 2, +\infty[$  ,  $f'(x) > 0$  وبالتالي  $f$  متزايدة تماما على هذا المجال.

⊗ جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

#### ③ تقاطع المنحني $C_r$ مع المستقيم $D$

المعادلة  $e^{2x} - 4e^x = -3$  تكافئ  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$$\begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 4X + 3 = 0 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

$$\text{للمعادلة } X^2 - 4X + 3 = 0, \text{ إذن , حلان : } X_1 = \frac{4-2}{2} = 1, X_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

• من أجل  $X = 1$  , المعادلة  $X = e^x$  تكافئ  $e^x = 1$

أي  $x = 0$

## التمرين 53

لنكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$ .  
 $C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O, i, j)$ .

- عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .
- ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
- عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث تكون الدالة  $F$  المعرفة كما يلي  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

## الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

## ① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x - 1) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty \times 0$$

وهذه حالة عدم تعيين، نرفعها بالطريقة الآتية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - x e^x - c^x) = 0$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 1) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة  $f$ 

$$f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x$$

نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^x > 0$

وبالتالي إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x^2 + x - 2$ ، وإليك ملخصاً لإشارته:

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$		
$x^2+x-2$		+	0	-	0	+

ومنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[$ ،  $f'(x) > 0$ ، وبالتالي  $f$  متزايدة تماماً على هذا المجال.

ومن أجل كل  $x$  من  $]-2, 1[$ ،  $f'(x) < 0$ ، وبالتالي  $f$  متناقصة تماماً على هذا المجال.

جدول التغيرات:

## ② دراسة تغيرات الدالة

الدالة المشتقة: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = 1 + e^{1-x}$

ندرس إشارة  $e^{1-x} = 1$  بالطريقة الآتية:

$$e^{1-x} = 1 \text{ تكافئ } 1 - x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$e^{1-x} < 1 \text{ تكافئ } 1 - x < 0 \text{ أي } x > 1$$

$$e^{1-x} > 1 \text{ تكافئ } 1 - x > 0 \text{ أي } x < 1$$

$$1 - e^{1-x} < 0 \text{ تكافئ } e^{1-x} > 1 \text{ أي } x < 1$$

$$1 - e^{1-x} > 0 \text{ تكافئ } e^{1-x} < 1 \text{ أي } x > 1$$

ومنه من أجل  $x$  من  $]-\infty, 1[$ ،  $f'(x) < 0$ ، وبالتالي  $f$  متناقصة تماماً على هذا المجال.

ومن أجل  $x$  من  $]1, +\infty[$ ،  $f'(x) > 0$ ، وبالتالي  $f$  متزايدة تماماً على هذا المجال.

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

## ③ المستقيم المقارب والوضعية

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$  فإن المستقيم  $D$  ذا المعادلة

$y = x$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحني  $C_f$  عند  $+\infty$ .

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x) - x = e^{1-x} > 0$  (لأن  $e^x > 0$ )

إذن يقع  $C_f$  فوق  $D$ .

④ وجود النقطة  $A$  : لنكن فاصلة النقطة  $A$  هي  $a$

بما أن معامل توجيه المماس هو  $-1$  فإن  $f'(a) = -1$  وبالتالي

$$1 - e^{1-a} = -1 \text{ تكافئ } e^{1-a} = 2$$

$$a = 1 - \ln 2 \text{ ومنه } 1 - a = \ln 2 \text{ أي } e^{1-a} = 2$$

$$\text{وبالتالي } f(1 - \ln 2) = 3 - \ln 2$$

نعوض في المعادلة  $y = f'(1 - \ln 2)(x - 1 + \ln 2) + f(1 - \ln 2)$  فنجد

$$y = -x + 4 - 2 \ln 2 \text{ أي } y = -(x - 1 + \ln 2) + 3 - \ln 2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$0$	
$f(x)$	$0$	$\frac{5}{e^2}$	$-e$	$+\infty$

3. تعيين الأعداد  $a, b, c$

إذا كانت  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  فإن  $F$  قابلة للاشتقاق على هذا المجال ولدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $F'(x) = f(x)$  ، وبالتالي

$$(x^2 - x - 1)e^x = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$= [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x$$

$$x^2 - x - 1 = ax^2 + (2a + b)x + b + c$$

والخلاصة أن :

وبالمطابقة نجد أن  $a = 1$  و  $b = -3$  و  $c = 2$  ومنه  $F(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$

### التمرين 54

(1) لتكن  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x - 1 + e^{-x}$  .

① ادرس تغيرات  $g$  على  $\mathbb{R}$  . ( لا يطلب حساب النهايتين )

② استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

(2) لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - e^{-x}$  .

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

① عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  .

② باستعمال نتائج السؤال (1) ، ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

③ عين معادلة للمماس  $T$  للمنحني  $C_f$  عند النقطة التي فاصلتها 0 .

④ برهن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  على المجال  $]0, +\infty[$  .

تأكد من أن  $2 < x_0 < 3$  . ثم عين قيمة تقريبية لـ  $x_0$  بتقريب 0.1 بالزيادة.

### الحل

① دراسة تغيرات الدالة  $g$

① الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) = 1 - e^{-x}$

ندرس إشارة  $1 - e^{-x}$  بالطريقة الآتية :

•  $1 - e^{-x} = 0$  تكافئ  $e^{-x} = 1$

تكافئ  $-x = 0$  ، أي  $x = 0$  .

•  $1 - e^{-x} < 0$  تكافئ  $e^{-x} > 1$

تكافئ  $-x > 0$  ، أي  $x < 0$  .

•  $1 - e^{-x} > 0$  تكافئ  $e^{-x} < 1$

تكافئ  $-x < 0$  ، أي  $x > 0$  .

ومنه من أجل  $x$  من  $]-\infty, 0[$  ،  $g'(x) < 0$  ، وبالتالي  $g$  متناقصة تماما على هذا المجال.

ومن أجل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ،  $g'(x) > 0$  ، وبالتالي  $g$  متزايدة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$0$	
$g(x)$		$0$	

② إشارة  $g(x)$  : من جدول التغيرات نستنتج إشارة  $g(x)$  كما في الجدول الآتي

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$		$0$	

النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2}x^2 - x \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty - (+\infty)$$

وهذه حالة عدم تعيين ، نرفعها بالطريقة الآتية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(-x)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}x^2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة  $f$

الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = x - 1 + e^{-x} = g(x)$

وإشارة  $f(x)$ ، إذن، من إشارة  $g(x)$ .

ومنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) \geq 0$ ، الدالة  $f$  متزايدة.

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f(x)$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$

③ المعاسي 7 نحسب:  $f(0) = -1$ ،  $f'(0) = 0$

نعوض في المعادلة  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  فنجد  $y = -1$  (افقي)

④ المعادلة ④

بما أن الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على  $]0, +\infty[$  و  $f(0) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  على هذا المجال.

وبما أن  $f(2) = -e^{-2}$  و  $f(3) = \frac{3}{2} - \frac{1}{e^3}$  أي  $f(2) \times f(3) < 0$  فإن

$2 < x_0 < 3$ .

من أجل تعيين قيمة مقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالزيادة، نسمح المجال  $[2, 3]$  بخطوة قدرها

0.1 كالآتي:

$x$	2	2.1	2.2	2.3	2.4				2.9	3
$f(x)$	-0.13	-0.01	0.10							

نوقف الحساب بعد 2.2 لأن  $f(x)$  تجاوزت 0.

نستنتج من الحدود أن القيمة المقربة لـ  $x_0$  إلى 0.1 بالزيادة هي 2.2.

### التمرين 55

(1) لتكن  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = (1-x)e^x - 1$ .

① عين نهايتي  $g$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

③ استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(2) لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (2-x)e^x + 2 - x$ .

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

② اشتق الدالة  $f$ . استنتج، باستعمال نتائج السؤال (1)، تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

③ برهن أن المستقيم  $D$  ذا المعادلة  $y = 2 - x$  مستقيم مقارب للمنحني  $C_f$ .

ادرس وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى المستقيم  $D$  على  $\mathbb{R}$ .

④ برهن أنه توجد نقطة  $A$  من المنحني  $C_f$  يكون فيها المماس  $T$  موازيا للمستقيم  $D$ . عين

إحداثيي هذه النقطة و معادلة للمماس  $T$ .

### الحل

① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = -\infty \times 0$$

وهذه حالة عدم تعيين، نرفعها بالطريقة الآتية

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x e^x - 1) = -1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = -\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة  $g$

الدالة المشتقة: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) = -x e^x$

نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^x > 0$

وبالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $-x$ ، وإليك ملخصا لإشارته:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$		$0$	

ومنه من أجل  $x$  من  $]-\infty, 0[$ ،  $g'(x) > 0$  وبالتالي  $g$  متزايدة تماما على هذا المجال.

ومن أجل  $x$  من  $]0, +\infty[$ ،  $g'(x) < 0$  وبالتالي  $g$  متناقصة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$0$	
$g(x)$	$-1$	$0$	$-\infty$

② إشارة  $g(x)$  من جدول التغيرات نستنتج إشارة  $g(x)$  كما في الجدول الآتي

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		-	0

## 2 حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$$

## 2 دراسة تغيرات الدالة f

الدالة المشتقة :

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x - 1 = (1-x)e^x - 1 = g(x)$  , وإشارة  $f'(x)$  , إذن , من إشارة  $g(x)$  .  
ومنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $f'(x) \leq 0$  , الدالة  $f$  متناقصة .

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	(4)	$-\infty$

## 3 المستقيم المقارب والوضعية

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x = 0$  فإن المستقيم  $D$  ذا

المعادلة  $y = 2-x$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $C_f$  عند  $-\infty$  .

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $f(x) - (2-x) = (2-x)e^x$  , وإشارة  $(2-x)e^x$  , إذن , من إشارة  $(2-x)$  وبالتالي

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (2-x)$		+	-
الوضعية	$C_f$ فوق $D$	$C_f$ يقطع $D$	$C_f$ تحت $D$

## 4 وجود النقطة A

بما أن المماس  $T$  يوازي  $D$  فإن لهما نفس معامل التوجيه أي  $f'(a) = -1$  وبالتالي

$$(1-a)e^a - 1 = -1 \text{ تكافئ } f'(a) = -1$$

تكافئ  $(1-a)e^a = 0$  أي  $1-a=0$  ومنه  $a=1$

وبالتالي  $f(1) = e+1$  ومنه  $A(1, e+1)$  .

نعوض في المعادلة  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  فنجد  $y = -(x-1) + e+1$  أي

$$y = -x + e + 2$$

## التمرين 56

لتكن دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = xe^{-x}$  .

1. المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (وحدة الرسم : 10 cm)

أ. عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  .

ب. ادرس تغيرات الدالة  $f$  وأنجز جدول تغيراتها .

ج. ارسم  $\Gamma$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

2. أ. بين أنه من أجل كل  $m$  من  $0, \frac{1}{e}$  , تقبل المعادلة  $f(x) = m$  حلين .

ب. في الحالة  $m = \frac{1}{4}$  , نرسم إلى الحلين بالرمزين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $\alpha < \beta$  .

عين حصرا سعة  $10^{-2}$  للحل  $\alpha$  .

ج. حل المعادلة  $f(x) = m$  في الحالتين  $m=0$  و  $m=\frac{1}{e}$  .

$y \in \mathbb{R}$

## الحل

$$\lim_{* \rightarrow \infty} *e^* = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$$

## ب. دراسة تغيرات الدالة f

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  ,  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$  , إذن , من إشارة  $1-x$  .

$x$	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	0



نوقف الحساب بعد 0.36 لأن  $f(x)$  تجاوزت 0.25.

نستنتج من الجدول حصرا للحل  $\alpha$  سعته  $10^{-2}$  هو  $0.35 < \alpha < 0.36$ .

ج. المعادلة  $f(x) = 0$  تكافئ  $x = 0$ .

المعادلة  $f(x) = \frac{1}{e}$  تكافئ  $x = 1$ .

التمرين 57

لتكن دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$ .

$\Gamma$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الرسم: 2 cm)

① عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ .

② برهن أن المستقيم  $\Delta$  ذا المعادلة  $y = 2x - 2$  مستقيم مقارب للمنحني  $\Gamma$ .

③ ادرس وضعية  $\Gamma$  بالنسبة إلى المستقيم  $\Delta$ .

④ احسب  $f'(x)$  وبيّن أن  $f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$ .

⑤ استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .

⑥ عين قيمة  $f'(0)$  ثم أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .

الحل

① حساب نهاية  $f$  عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(2) = +\infty$$

② المستقيم المقارب والوضعية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} + e^{-x}) = 0$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0$  فإن المستقيم  $\Delta$  ذا المعادلة  $y = 2x - 2$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحني  $\Gamma$  عند  $+\infty$ .

$$f(x) - (2x - 2) = (1-x)e^{-x}, [0, +\infty[$$

وإشارة  $(1-x)e^{-x}$ , إذن, من إشارة  $(1-x)$  وبالتالي

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (2x - 2)$		0	
الوضعية	$\Delta$ فوق $\Gamma$	$\Gamma$ يقطع $\Delta$	$\Delta$ تحت $\Gamma$

④ حساب  $f'(x)$

ومنه, من أجل كل  $x$  من  $[0, 1[$ ,  $f'(x) > 0$ , الدالة  $f$  متزايدة تماما.

ومن أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ , الدالة  $f$  متناقصة تماما.

جدول التغيرات:

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

رسم  $\Gamma$



2. أ. المعادلة  $f(x) = m$

بما أن الدالة  $f$  مستمرة ورتبية تماما على  $I = [0, 1[$  و  $f(0) < m < f(1)$

فإن المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

ملاحظة: يمكن استبدال الشرط  $f(0) < m < f(1)$  بالشرط  $m \in f(I)$

و بما أن الدالة  $f$  مستمرة ورتبية تماما على  $I = [1, +\infty[$  و  $m \in f(I)$

فإن المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

الخلاصة: تقبل المعادلة  $f(x) = m$  حلين.

ب. في الحالة  $m = \frac{1}{4}$  لتكن المعادلة  $f(x) = \frac{1}{4}$

من أجل تعيين حصرا للحل  $\alpha$ , نسمح المجال  $[0, 1[$  بخطوة قدرها  $10^{-2}$  كالآتي:

$x$	0	0.01			0.35	0.36			0.9	1
$f(x)$	0.00	0.09			0.24	0.25				

من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  ،  $f'(x) = 2 - e^{-x} + (x-1)e^{-x}$

ومنه  $f'(x) = 2 - e^{-x} + (x-1)e^{-x} = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$

⑤ إشارة  $f'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  ،  $xe^{-x} > 0$  و  $1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} > 0$

إذن ، من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  ،  $f'(x) > 0$

⑥ جدول تغيرات  $f$  لدينا  $f'(0) = 0$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	$+\infty$

### التمرين 58

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x^2 e^{1-x}$

$\Gamma$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (وحدة الرسم : 2 cm)

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  . ماذا تستنتج بياناً بالنسبة للمنحني  $\Gamma$  ؟

② بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  . عين دالتها المشتقة  $f'$  .

③ أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  ثم ارسم المنحني  $\Gamma$

### الحل

① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-x}) = 0$$

الاستنتاج البياني :

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  فإن للمنحني فرعاً من قطع مكافئ

في اتجاه محور الترتيب .

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن للمنحني مستقيماً مقارباً أفقياً هو محور الترتيب .

② الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = 2xe^{1-x} + -x^2 e^{1-x} = (-x^2 + 2x) e^{1-x} , \mathbb{R} \text{ من أجل كل } x$$

وإشارة  $f'(x)$  ، إذن ، من إشارة  $-x^2 + 2x$  .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$-x^2 + 2x$		0	+	0	-

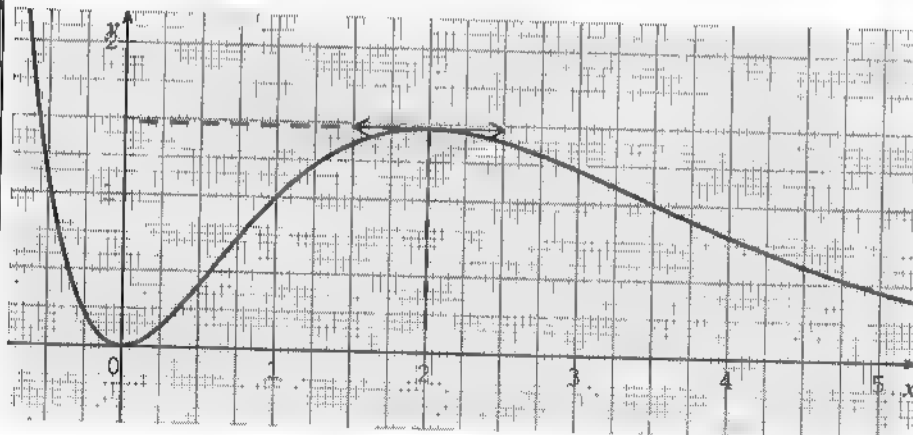
③ جدول تغيرات الدالة

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{4}{e}$		0

④ رسم المنحني  $\Gamma$  : وخطواته هي :

• نرسم النقطتين :  $(0, 0)$  و  $(2, \frac{4}{e})$  (بملاحظة جدول التغيرات) .

• نرسم  $\Gamma$  على المجال  $\mathbb{R}$  بتوجيه من جدول التغيرات والانتباه إلى الفروع اللانهائية .



### التمرين 59

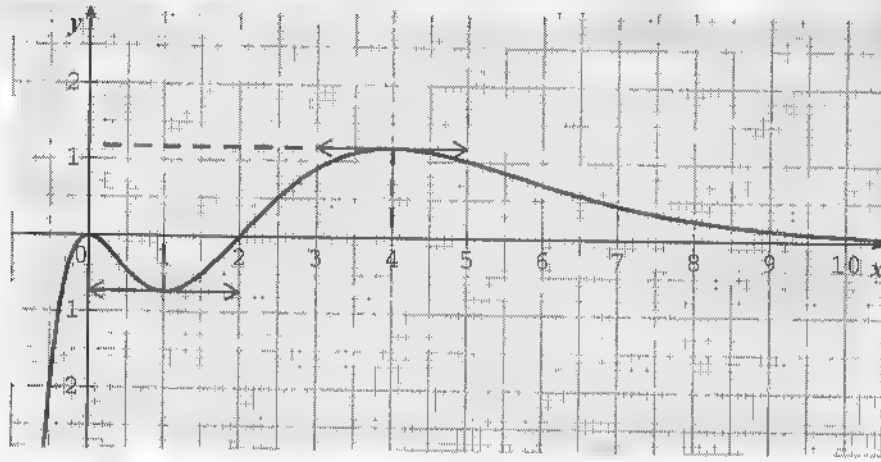
لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (2x^3 - 4x^2) e^{-x}$

$\Gamma$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (وحدة الرسم : 1 cm)

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  .

② احسب  $f'(x)$  وبين أن  $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$

③ أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  .



التمرين 60

لتكن دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ .

$\Gamma$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(وحدة الرسم هي: 2 cm على محور الفواصل و 5 cm على محور الترتيب)

(1) لتكن دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = e^x - x - 1$ .

① ادرس تغيرات  $g$  على  $\mathbb{R}$ . استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

② بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ,  $(e^x - x)$  موجب تماما.

(2) ① عين نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ . فسر، بيانيا، هذه النتائج.

② احسب  $f'(x)$ .

③ ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أنجز جدول تغيراتها.

④ عين معادلة للمماس  $T$  للمنحني  $\Gamma$  في النقطة ذات الفاصلة 0.

⑤ باستعمال الجزء (1)، ادرس وضعية المنحني  $\Gamma$  بالنسبة إلى المستقيم  $T$ .

⑥ ارسم المستقيم  $T$  والمنحني  $\Gamma$ .

الحل

① دراسة تغيرات الدالة  $g$

حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1) = +\infty$$

④ ارسم المنحني  $\Gamma$ .

الحل

① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 e^{-x} - 4x^2 e^{-x}) = 0$$

الاستنتاج البياني:

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  فإن للمنحني فرعاً من قطع مكافئ.

عند  $-\infty$ ، في اتجاه محور الترتيب.

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن للمنحني مستقيماً مقارباً أفقياً هو محور الترتيب.

② الدالة المشتقة للدالة  $f$

الدالة المشتقة:

$$f'(x) = (6x^2 - 8x)e^{-x} - (2x^3 - 4x^2)e^{-x}, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

$$= (-2x^3 + 10x^2 - 8x)e^{-x} = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$$

وإشارة  $f'(x)$ ، إذن، من إشارة  $x(-x^2 + 5x - 4)$ .

$x$	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$x$	-	0	+	+	+
$-x^2 + 5x - 4$	-	0	-	0	-
$x(-x^2 + 5x - 4)$	+	0	-	0	-

③ جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{2}{e}$	$\frac{64}{e^4}$	0

④ رسم المنحني  $\Gamma$ : وخطواته هي:

• نرسم النقط:  $(0,0)$  و  $(1, -\frac{2}{e})$  و  $(4, \frac{64}{e^4})$  (بملاحظة جدول التغيرات).

• نرسم  $\Gamma$  على المجال  $\mathbb{R}$  بتوجيه من جدول التغيرات والانتباه إلى الفروع اللانهائية.

وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \frac{+\infty}{+\infty - \infty}$

الآتية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$

التفسير البياني لهذه النتائج : للمنحني  $\Gamma$  مستقيمان مقاربان أفقيان , معادلتهما  $x=0$  و  $x=-1$  (محور الفواصل).

الدالة المشتقة للدالة

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$

وإشارة  $f'(x)$  , إذن , من إشارة  $(1-x)$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

ومنه , من أجل كل  $x$  من  $]-\infty, 0]$  ,  $f'(x) > 0$  , الدالة  $f$  متزايدة تماما.

ومن أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  ,  $f'(x) < 0$  , الدالة  $f$  متناقصة تماما.

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

نحسب :  $f(0)=0$  ,  $f'(0)=1$

نعوض في المعادلة  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  فنجد  $y=x$

وضعية  $T$  بالنسبة إلى  $T$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $f(x) - x = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

نعلم من (1) أن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $e^x - x - 1 > 0$  و  $e^x - x > 0$  ومنه إشارة  $f(x) - x$  , إذن , إشارة  $(-x)$  وبالتالي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x-1) = +\infty - \infty$

وهي حالة عدم التعيين , نرفعها بالطريقة الآتية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{x+1}{x} \right) = +\infty$

الدالة المشتقة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ,  $g'(x) = e^x - 1$

وبالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $e^x - 1$  , وإليك ملخصا لإشارته :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

ومن أجل  $x$  من  $]-\infty, 0]$  ,  $g'(x) < 0$  وبالتالي  $g$  متناقصة تماما على هذا المجال.

ومنه من أجل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ,  $g'(x) > 0$  وبالتالي  $g$  متزايدة تماما على هذا المجال.

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

إشارة  $g(x)$  : من جدول التغيرات نستنتج إشارة  $g(x)$  كما في الجدول الآتي

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

( $e^x - x$ ) موجب تمام على  $\mathbb{R}$ .

لدينا من أجل كل  $x$  ,  $g(x) > 0$  أي  $e^x - x - 1 > 0$  وهذا يكافئ  $e^x - x > 1$

وبالتالي ( $e^x - x$ ) موجب تماما.

الدالة  $f$

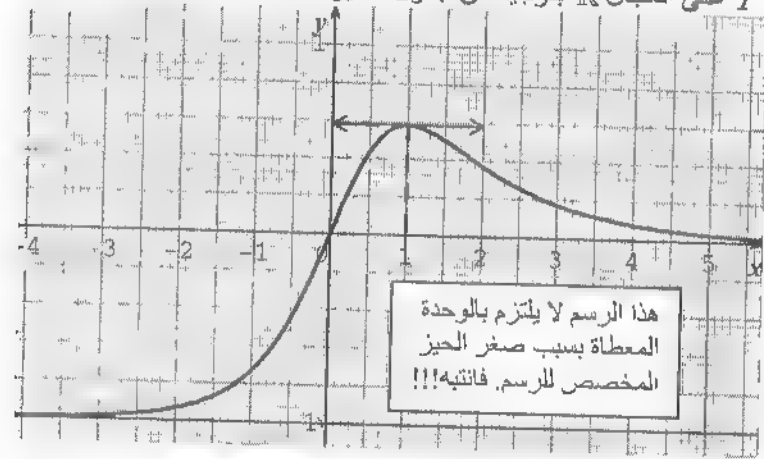
وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \frac{-\infty}{+\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	$-$
الوضعية	$\Delta$ فوق $\Gamma$	$\Gamma$ يقطع $\Delta$	$\Delta$ تحت $\Gamma$

⑥ رسم المنحني  $f$  وخطواته هي :

- نرسم المعلم مع الالتزام بالوحدة المعطاة.
- نرسم فقط المستقيم المقارب الذي معادلته  $x = -1$  أما المقارب الآخر فهو مرسوم.
- نرسم النقطة :  $\left(1, \frac{1}{e-1}\right)$  (بملاحظة جدول التغيرات).
- نرسم  $\Gamma$  على المجال  $\mathbb{R}$  بتوجيه من جدول التغيرات.



## التمرين 61

لتكن دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$\Gamma$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الرسم هي : 5 cm)

① بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

② عين نهايتي الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ . فسر ، بيانيا ، هذه النتائج.

③ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، احسب  $f'(x)$

④ ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أنجز جدول تغيراتها.

⑤ ارسم المنحني  $\Gamma$  .

## الحل

بضرب بسط ومقام الكسر  $\frac{1}{1+e^{-x}}$  في  $e^x$  نحصل على  $\frac{e^x}{1+e^x}$  وبالتالي :

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

## ② حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

التفسير البياني لهذه النتائج : للمنحني  $\Gamma$  مستقيمان مقاربان أفقيان ، معادلتهما  $x=0$  و  $x=1$  (محور الفواصل).

③ الدالة  $f$  متزايدة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

④ دراسة تغيرات الدالة  $f$ 

إشارة  $f'(x)$  ، إذن ، موجبة تماما ، وبالتالي : الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

⑤ جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	1

⑥ رسم المنحني  $\Gamma$  وخطواته هي :

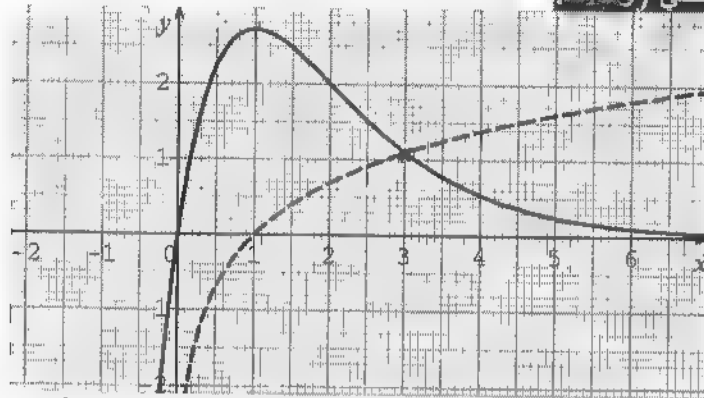
• نرسم المعلم مع الالتزام بالوحدة المعطاة.

• نرسم فقط المستقيم المقارب الذي معادلته  $x=1$  أما المقارب الآخر فهو مرسوم.

• نرسم  $\Gamma$  على المجال  $\mathbb{R}$  بتوجيه من جدول التغيرات.

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	$e$	0

② رسم منحنى  $f$



نستنتج، من هذا الرسم، عدد حلول المعادلة  $f(x) = \ln x$  على المجال  $[1, +\infty[$  هو 1.

③ تغيرات الدالة  $g$  من الرسم نستنتج أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال

$[1, +\infty[$  وبالتالي الدالة  $(-f)$  متزايدة تماما على هذا المجال. ونستنتج، أيضا، أن الدالة

$\ln x \mapsto x$  متزايدة على المجال  $[1, +\infty[$ . وبما أن الدالة  $g$  هي مجموع الدالتين  $(-f)$

و  $\ln x \mapsto x$  المتزايدتين تماما على  $[1, +\infty[$ ، فإن  $g$  متزايدة تماما على هذا المجال.

المعادلة  $f(x) = \ln x$  تكافئ  $\ln x - f(x) = 0$  أي أن  $g(x) = \ln x - f(x)$

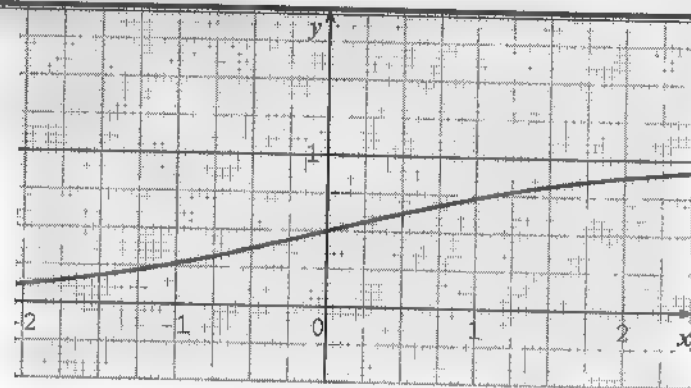
وبما أن الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة تماما على المجال  $[1, +\infty[$  و  $g(1) < 0$  فإن للمعادلة

$f(x) = \ln x$  حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[1, +\infty[$ .

④ قيمة تقريبية لـ  $\alpha$

من أجل تعيين قيمة لـ  $\alpha$ ، نمنح المجال  $[3, 3.5]$ ، مثلا، بخطوة قدرها  $10^{-3}$  كالآتي:

$x$	3	3.001	3.002	3.003	3.004	3.005	3.006
$g(x)$	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.001



التمرين 62

لتكن دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = xe^{-x+2}$ .

① أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  وعين المستقيمات المقاربة للمنحنى الممثل لها.

② ارسم على الآلة الحاسبة البيانية منحنى الدالتين  $f$  و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الذي نرسم إليه بالرمز  $\ln$ . استنتج من هذا الرسم عدد حلول المعادلة

$f(x) = \ln x$  على المجال  $[1, +\infty[$

③ بين أن الدالة  $g$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = \ln x - f(x)$

متزايدة تماما على المجال  $[1, +\infty[$ .

استنتج أن المعادلة  $f(x) = \ln x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $[1, +\infty[$ .

④ عين قيمة تقريبية لـ  $\alpha$  بتقريب  $10^{-3}$ .

الحل

① جدول تغيرات الدالة

حساب نهاية  $f$  عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{-x+2} \right) [(-x+2)e^{-x+2}] = -1 \times 0 = 0$$

الاستنتاج البياني:

• بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن للمنحنى مستقيما مقاربا أفقيا هو محور الترتيب.

الدالة المشتقة:

من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$ ،  $f'(x) = e^{-x+2} - xe^{-x+2} = (1-x)e^{-x+2}$ ،

وإشارة  $f'(x)$ ، إذن، من إشارة  $1-x$ .

• جدول التغيرات:

نوقف الحساب عند 3.006 لأن  $g(x)$  تجاوزت 0.  
إذن يمكن أخذ 3.005 كقيمة تقريبية لـ  $\alpha$  بتقريب  $10^{-3}$ .

### تمارين على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

#### التمرين 63

حل  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية :

- (1)  $\ln(x+1)=0$  ،  $\ln(2-3x)=\ln 4$  ،  $\ln(2x)=\ln(x-1)$  (3)
- (4)  $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$  ،  $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$  (5)
- (6)  $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$  ،  $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$  (7)
- (8)  $\ln(4x+1)+\ln(x+2)-2\ln(3x)=0$  (9) ،  $\ln x=4$
- (10)  $\ln(2x)=5$  (11) ،  $\ln(x+1)=-2$  (12) ،  $(\ln x)^2-6\ln x+8=0$

#### الحل

(1) تكون المعادلة  $\ln(x+1)=0$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $x+1>0$  أي  $x>-1$   
ومنه نحل هذه المعادلة على المجال  $]-1, +\infty[$ .

ولدينا  $\ln(x+1)=\ln 1$  تكافئ  $\ln(x+1)=\ln 1$

تكافئ  $x+1=1$  أي أن  $x=0$ .

وهي قيمة تنتمي إلى المجال  $]-1, +\infty[$  ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{0\}$ .

(2) تكون المعادلة  $\ln(2-3x)=\ln 4$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $2-3x>0$

أي  $x<\frac{2}{3}$  . ومنه نحل هذه المعادلة على المجال  $]-\infty, \frac{2}{3}[$ .

ولدينا  $\ln(2-3x)=\ln 4$  تكافئ  $2-3x=4$  أي أن  $x=-\frac{2}{3}$ .

وهي قيمة تنتمي إلى المجال  $]-\infty, \frac{2}{3}[$  ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{-\frac{2}{3}\}$ .

(3) تكون المعادلة  $\ln(2x)=\ln(x-1)$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $\begin{cases} 2x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$

أي  $\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}$  . ومنه نحل هذه المعادلة على المجال  $]1, +\infty[$ .

ولدينا  $\ln(2x)=\ln(x-1)$  تكافئ  $2x=x-1$  أي أن  $x=-1$  ، وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال  $]1, +\infty[$  ، ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\emptyset$ .

(4) تكون المعادلة  $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$  معرفة إذا وفقط إذا كان

أي  $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$  . ومنه نحل هذه المعادلة على المجال  $]3, +\infty[$ .

ولدينا  $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$  تكافئ  $\ln(x-1)(x-3)=\ln 3$

تكافئ  $(x-1)(x-3)=3$

تكافئ  $x^2-4x=0$

أي أن  $x=0$  (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال  $]3, +\infty[$ ).

أو  $x=4$  (وهي قيمة تنتمي إلى المجال  $]3, +\infty[$ ).

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{4\}$ .

(5) تكون المعادلة  $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$  معرفة إذا وفقط إذا كان

أي  $\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases}$  . ومنه نحل هذه المعادلة على المجال  $]2, +\infty[$ .

ولدينا  $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$  تكافئ  $\ln(x-1)(x-2)=\ln 6$

تكافئ  $(x-1)(x-2)=6$

تكافئ  $x^2-3x-4=0$

أي أن  $x=-1$  (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال  $]2, +\infty[$ ).

أو  $x=4$  (وهي قيمة تنتمي إلى المجال  $]2, +\infty[$ ).

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{4\}$ .

(6) تكون المعادلة  $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$  معرفة إذا وفقط إذا كان

أي  $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 4x-1>0 \end{cases}$  . ومنه نحل هذه المعادلة على المجال  $]1, +\infty[$ .

ولدينا  $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$  تكافئ  $\ln 4(x^2-1)=\ln(4x-1)$



$$4x^2 - 4 = 4x - 1 \quad \text{تكافئ} \quad \ln 4(x^2 - 1) - \ln(4x - 1)$$

$$4x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \text{أي أن}$$

أي أن  $x = -\frac{1}{2}$  (وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال  $]1, +\infty[$ ).

$$\text{أو } x = \frac{3}{2} \quad \text{(وهي قيمة تنتمي إلى المجال } ]1, +\infty[ \text{)}.$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ .

$$(7) \text{ لنحل المعادلة } (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \text{ على المجال } ]0, +\infty[.$$

نضع  $X = \ln x$  وبالتالي:

$$\begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - 2X - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$$

$$\text{المعادلة } X^2 - 2X - 3 = 0 \text{ تكافئ } X = -1 \text{ أو } X = 3.$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = -1, X = \ln x \text{ تكافئ } \ln x = -1 \text{ أي أن } x = \frac{1}{e}.$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 3, X = \ln x \text{ تكافئ } \ln x = 3 \text{ أي أن } x = e^3.$$

إذن مجموعة الحلول هي  $\left\{\frac{1}{e}, e^3\right\}$ .

$$(8) \text{ المعادلة } \ln(4x+1) + \ln(x+2) - 2\ln(3x) = 0 \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ x > -2 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 4x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ 3x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ولدينا المعادلة (8) تكافئ } \ln(4x+1)(x+2) = \ln 9x^2$$

$$\text{تكافئ} \quad (4x+1)(x+2) = 9x^2$$

$$\text{تكافئ} \quad 5x^2 - 9x - 2 = 0$$

$$\text{أي أن } x = -\frac{1}{5} \quad \text{(وهذه القيمة مرفوضة لأنها لا تنتمي إلى المجال } ]0, +\infty[ \text{)}.$$

$$\text{أو } x = 2 \quad \text{(وهي قيمة تنتمي إلى المجال } ]0, +\infty[ \text{)}.$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\{2\}$ .

$$(9) \text{ لنحل المعادلة } \ln x = 4 \text{ على المجال } ]0, +\infty[.$$

$$\text{ولدينا المعادلة (9) تكافئ } x = e^4 \text{، ومنه مجموعة حلول المعادلة هي } \{e^4\}.$$

$$(10) \text{ لنحل المعادلة } \ln(2x) = 5 \text{ على المجال } ]0, +\infty[.$$

$$\text{ولدينا المعادلة (10) تكافئ } 2x = e^5 \text{ أي أن } x = \frac{e^5}{2}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\left\{\frac{e^5}{2}\right\}$ .

$$(11) \text{ لنحل المعادلة } \ln(x+1) = -2 \text{ على المجال } ]-1, +\infty[.$$

$$\text{ولدينا المعادلة (11) تكافئ } x+1 = \frac{1}{e^2} \text{ أي أن } x = \frac{1}{e^2} - 1$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $\left\{\frac{1}{e^2} - 1\right\}$ .

$$(12) \text{ لنحل المعادلة } (\ln x)^2 - 6\ln x + 8 = 0 \text{ على المجال } ]0, +\infty[.$$

نضع  $X = \ln x$  وبالتالي:

$$\begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - 6X + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad (\ln x)^2 - 6\ln x + 8 = 0$$

$$\text{المعادلة } X^2 - 6X + 8 = 0 \text{ تكافئ } X = 2 \text{ أو } X = 4.$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 2, X = \ln x \text{ تكافئ } \ln x = 2 \text{ أي أن } x = e^2.$$

$$\bullet \text{ من أجل } X = 4, X = \ln x \text{ تكافئ } \ln x = 4 \text{ أي أن } x = e^4.$$

إذن مجموعة الحلول هي  $\{e^2, e^4\}$ .

#### التمرين 64

حل  $\mathbb{R}$  المتراجحات الآتية:

$$(1) \ln(x+1) \leq 0 \quad (2) \ln(2-3x) < \ln 4 \quad (3) 1 + \ln x \geq 0$$

$$(4) \ln(2-x) \geq 0 \quad (5) \ln(x-1) + \ln(x-2) > \ln 6$$

(5) تكون المتراجحة  $\ln(x-1) + \ln(x-2) > \ln 6$  معرفة إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} . \text{ ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال } ]2, +\infty[ .$$

ولدينا  $\ln(x-1) + \ln(x-2) > \ln 6$  تكافئ  $\ln(x-1)(x-2) > \ln 6$

$$\cdot (x-1)(x-2) > 6 \text{ تكافئ}$$

$$\cdot x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ تكافئ}$$

$$\text{أي أن } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]4, +\infty[$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي  $]4, +\infty[ \cap ]2, +\infty[ = ]4, +\infty[$

### التمرين 65

لتكن دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x + \ln x$

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

### الحل

① حساب نهايتي الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot$$

② دراسة تغيرات الدالة  $f$

$$\bullet \text{ الدالة المشتقة: من أجل كل } x \text{ من } ]0, +\infty[ , f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

إشارة  $f'(x)$  , إذن , موجبة تماما , وبالتالي : الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]0, +\infty[$ .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

### الحل

(1) تكون المتراجحة  $\ln(x+1) \leq 0$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $x+1 > 0$  أي  $x > -1$

ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال  $]-1, +\infty[$ .

ولدينا  $\ln(x+1) \leq 0$  تكافئ  $\ln(x+1) \leq \ln 1$

$$\text{تكافئ } x+1 \leq 1 \text{ أي أن } x \in ]-\infty, 0]$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي  $]-1, 0[ \cap ]-\infty, 0[ = ]-\infty, 0[$

(2) تكون المتراجحة  $\ln(2-3x) < \ln 4$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $2-3x > 0$

أي  $x < \frac{2}{3}$  ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال  $]-\infty, \frac{2}{3}[$

ولدينا  $\ln(2-3x) < \ln 4$  تكافئ  $2-3x < 4$

$$\text{تكافئ } x > -\frac{2}{3} \text{ أي أن } x \in ]-\frac{2}{3}, +\infty[$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي  $]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[ \cap ]-\frac{2}{3}, +\infty[ = ]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$

(3) نحل المتراجحة  $1 + \ln x \geq 0$  في  $]0, +\infty[$

المتراجحة (3) تكافئ  $\ln x \geq -1$

$$\text{تكافئ } \ln x \geq \ln e^{-1}$$

$$\text{تكافئ } x \geq \frac{1}{e} \text{ أي أن } x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[ \cap ]0, +\infty[ = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$

(4) تكون المتراجحة  $\ln(2-x) \geq 0$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $2-x > 0$  أي  $x < 2$

ومنه نحل هذه المتراجحة على المجال  $]-\infty, 2[$ .

ولدينا  $\ln(2-x) \geq 0$  تكافئ  $\ln(2-x) \geq \ln 1$

$$\text{تكافئ } 2-x \geq 1 \text{ أي أن } x \in ]-\infty, 1]$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي  $]-\infty, 1[ \cap ]-\infty, 2[ = ]-\infty, 1[$

تحقق من أن  $3.1 < x_0 < 3.2$ .

الحل

① حساب نهايتي الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty + \infty$  وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( -1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة  $f$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} \quad , \quad \text{الدالة المشتقة: من أجل كل } x \text{ من } ]0, +\infty[$$

إشارة  $f'(x)$  , إذن , من إشارة  $-x+1$  وبالتالي :

الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]0, 1[$  و متناقصة تماما على  $]1, +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

③ المعادلة  $f(x) = 0$

بما أن الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على  $]1, +\infty[$  و  $0 \in f(]1, +\infty[)$  ,

فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في  $]1, +\infty[$ .

وبما أن  $f(3.1) = 0.03$  و  $f(3.2) = -0.04$  أي أن  $f(3.1) \times f(3.2) < 0$

فإن  $3.1 < x_0 < 3.2$ .

التمرين 68

لتكن دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x \ln x - x$ .

•  $C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$ .

التمرين 66

لتكن دالة معرفة على  $]2, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ .

•  $C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند 2 و  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]2, +\infty[$ .

③ عين إحداثيي نقطة تقاطع  $C_f$  مع محور الفواصل.

الحل

① حساب نهايتي الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x - 2) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 2) = +\infty$$

② دراسة تغيرات الدالة  $f$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2} \quad , \quad \text{الدالة المشتقة: من أجل كل } x \text{ من } ]2, +\infty[$$

إشارة  $f'(x)$  , إذن , موجبة تماما , وبالتالي : الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]2, +\infty[$ .

$x$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

التمرين 67

لتكن دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = -x + 2 + \ln x$ .

•  $C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

③ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في  $]1, +\infty[$ .

لتكن دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = 8 \ln x - 3x + \frac{4}{x}$ .

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

③ عين معادلة للمستقيم  $T$  مماس المنحني  $C_f$  في النقطة التي فاصلتها 2.



### ① حساب نهايتي الدالة $f$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty + \infty$  وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (8x \ln x - 3x^2 + 4) = +\infty$$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$  وهي حالة عدم تعيين، أيضا، نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 8 \frac{\ln x}{x} - 3 + \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

### ② دراسة تغيرات الدالة $f$

• الدالة المشتقة:

$$f'(x) = \frac{8}{x} - 3 - \frac{4}{x^2} = \frac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2}, \text{ من أجل كل } x \text{ من } ]0, +\infty[$$

إشارة  $f'(x)$ ، إذن، من إشارة  $-3x^2 + 8x - 4$  وبالتالي:

الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]2, +\infty[$  و  $0, \frac{2}{3}[$  و متزايدة تماما على  $[\frac{2}{3}, 2]$ .

$x$	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$8 \ln \frac{2}{3} + 4 \approx 0.75$	$8 \ln 2 - 4 \approx 0.5$	$-\infty$		

③ المماس  $T$  نحسب :  $f(1) = 1, f'(1) = 1$

② ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

③ حل في  $]0, +\infty[$  المتراجحة  $f(x) \leq 0$ .



### ① حساب نهايتي الدالة $f$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$  وهي حالة عدم تعيين نرفعها بالطريقة الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln x - 1) = +\infty$$

### ② دراسة تغيرات الدالة $f$

• الدالة المشتقة: من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$ ،  $f'(x) = \ln x$

إشارة  $f'(x)$ ، إذن، من إشارة  $\ln x$  وبالتالي:

الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]0, 1[$  و متزايدة تماما على  $]1, +\infty[$ .

$x$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$-1$		$+\infty$

### ③ المتراجحة $f(x) \leq 0$

من أجل  $x$  من  $]0, +\infty[$ ،  $f(x) \leq 0$  تكافئ  $x \ln x - x \leq 0$

تكافئ  $x (\ln x - 1) \leq 0$

إشارة  $x (\ln x - 1)$  من إشارة  $(\ln x - 1)$  هي:

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

ومن مجموعة حلول المتراجحة  $f(x) \leq 0$  هي  $]0, 1[$ .



نعوض في المعادلة  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  فلجد  $y = x$

## التمرين 70

لتكن دالة معرفة على  $]2, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين نهايتي الدالة  $f$  عند 2 و  $+\infty$ .

② عين الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

• بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]2, +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$

• ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]2, +\infty[$ .

③ لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $]2, +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = \ln x$ .

$C_g$  المنحني الممثل للدالة  $g$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

• بين أن المنحنيين  $C_f$  و  $C_g$  متقاربان.

• ادرس الوضعية النسبية لهما على  $]2, +\infty[$ .

④ بين أن الدالة  $h$  المعرفة كما يلي :  $h(x) = \ln(x-2) + x(\ln x - 1)$  هي

دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]2, +\infty[$  على  $g(x) = \ln x$ .

## الحل

① حساب نهايتي الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

② ادرس تغيرات الدالة  $f$

• الدالة المشتقة:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2} , \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]2, +\infty[$$

إشارة  $f'(x)$  ، إذن ، من إشارة  $x^2 - 5x + 4$  وبالتالي :

الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]4, +\infty[ \cup ]2, 1[$  و متناقصة تماما على  $]1, 4[$ .

$x$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \ln 4$	$+\infty$

## ③ التمثيل

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$  فإن  $C_f$  يقارب  $C_g$ .

وبما أن : من أجل كل  $x$  من  $]2, +\infty[$   $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2} > 0$

فإن  $C_f$  يقع فوق  $C_g$ .

④ دالة أصلية للدالة  $f$ 

بما أن الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $]2, +\infty[$  ولدينا  $h'(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x = f(x)$

فإن  $h$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]2, +\infty[$ .

## التمرين 71

① لتكن  $g$  دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$

• ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $]0, +\infty[$  . ( لا يطلب حساب النهايتين )

• احسب  $g(1)$  . استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]0, +\infty[$  .

② لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x}$

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

• عين نهايتي الدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$ .

• عين الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

• ادرس ، باستعمال الجزء ① ، تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

③ لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$  فإن  $C_h$  يقارب  $C_f$ .

وبما أن: من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$   $f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{\ln x}{x}$

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - \frac{1}{2}x^2$		0	-
الوضعية	$C_h$ فوق $C_f$	$C_h$ يقطع $C_f$	$C_h$ تحت $C_f$

التمرين 72

لتكن دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 3 - 2x - \ln x$ .

$C_f$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① ادرس نهايتي  $f$  عند 0 وعند  $+\infty$ .

② ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

③ أعط معادلة للمستقيم  $T$  مماس للمنحني  $C_f$  عند النقطة التي فاصلتها 1.

④ ادرس الوضعية النسبية للمنحني  $C_f$  والمستقيم  $\Delta$  ذي المعادلة  $y = 3 - 2x$ .

⑤ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]0, +\infty[$ .

• تحقق من أن  $1.3 < \alpha < 1.4$ .

• عين قيمة تقريبية لـ  $\alpha$  بتقريب 0.01.

⑥ لتكن  $g$  دالة معرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x - x \ln x$ .

• اشتق الدالة  $g$ .

• استنتج الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

الحل

① نهايتا الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

② تغيرات الدالة  $f$

• الدالة المشتقة:

$C_h$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

• بين أن المنحنيين  $C_h$  و  $C_f$  متقاربان.

• ادرس الوضعية النسبية لهما على  $]0, +\infty[$ .



① الدالة المشتقة:

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}, \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]0, +\infty[$$

إشارة  $f'(x)$ , إذن, موجبة تماما, وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]0, +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		

•  $g(1) = 0$ , وإشارة  $g(x)$ , إذن, هي:

$x$	0	1	$+\infty$
$g(x)$		0	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

• الدالة المشتقة:

$$f'(x) = x - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^3 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}, \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]0, +\infty[$$

إذن, إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ , وبالتالي جدول تغيرات  $f$  هو

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ،  $f'(x) = -2 - \frac{1}{x}$

إذن ، إشارة  $f'(x)$  سالبة تماما وبالتالي الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]0, +\infty[$  ومنه جدول تغيرات  $f$  هو

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

نحسب :  $f(1) = 1$  ،  $f'(1) = -3$

نعوض في المعادلة  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  فنجد  $y = -3x + 4$

بالتعبئة التي

بما أن : من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ،  $f(x) - (3-2x) = -\ln x$

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - \frac{1}{2}x^2$		0	
الوضعية	$\Delta$ فوق $C_f$	$\Delta$ يقطع $C_f$	$\Delta$ تحت $C_f$

المعادلة

• بما أن الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على  $]0, +\infty[$  و  $0 \in f(]0, +\infty[)$

فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في  $]0, +\infty[$ .

• وبما أن  $f(1.3) = 0.14$  و  $f(1.4) = -0.13$  ، أي أن  $f(1.3) \times f(1.4) < 0$

فإن  $1.3 < \alpha < 1.4$ .

• من أجل تعيين قيمة  $\alpha$  ، نمنح المجال  $[1.345, 1.400]$  ، مثلا ، بخطوة قدرها

$10^{-3}$  كالاتي :

$x$	1.345	1.346	1.347	1.348	1.349	1.350	1.351
$f(x)$	0.014	0.011	0.008	0.005	0.003	0.000	-0.003

نوقف الحساب عند 1.350 لأن  $f(x)$  تجاوزت 0.

إذن يمكن أخذ 1.350 كقيمة تقريبية لـ  $\alpha$  بتقريب  $10^{-3}$ .

الدوال الأصلية للدالة

• من أجل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ،  $g'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$

• إذن ، الدوال  $x \mapsto 3x - x^2 + (x - x \ln x) + C$

أي  $x \mapsto -x^2 + 4x - x \ln x + C$  هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

قوى عدد حقيقي موجب تماما

• من أجل كل  $a > 0$  و  $b \in \mathbb{R}$  ،  $a^b = e^{b \ln a}$

• خواص : من أجل كل  $a > 0$  و  $b \in \mathbb{R}$  و  $c \in \mathbb{R}$  لدينا

$$a^c = \frac{1}{a^{-c}} \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \quad a^b \times a^c = a^{b+c} \quad (a^b)^c = a^{b \times c}$$

التمرين 73

اكتب على الشكل  $e^a$  العبارات الآتية:

$$F = \sqrt{3}^{\sqrt{3}} , E = 2^e , D = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\sqrt{2}} , C = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} , B = 5^{\frac{1}{3}} , A = 2^{-3}$$

الحل

$$C = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln \frac{1}{2}} = e^{-\sqrt{3} \ln 2} , B = 5^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln 5} , A = 2^{-3} = e^{-3 \ln 2}$$

$$F = \sqrt{3}^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln \sqrt{3}} , E = 2^e = e^{e \ln 2} , D = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2} \ln \frac{3}{4}}$$

التمرين 74

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

$$0.7^x = 3 \quad (3) , 3^{-x} = 6 \quad (2) , 3^x = 5 \quad (1)$$

$$2 \times 5^{2x} - 3 \times 5^x + 1 = 0 \quad (6) , 2^x \times 5^x = 3 \quad (5) , 2^x = 3 \times 5^x \quad (4)$$

الحل

(1) المعادلة  $3^x = 5$  تكافئ  $e^{x \ln 3} = e^{\ln 5}$

تكافئ  $x \ln 3 = \ln 5$  ومنه  $x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  (لأن في اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة " القوة " ) .

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$  (لأن في اللانهاية تتفوق الدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتمية) .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{e^{-x}} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^n = 0$  .

الخلاصة :

في اللانهاية , تتفوق الدالة الأسية على الدالة " القوة " وتتفوق الدالة " القوة " على الدالة اللوغاريتمية .

أمثلة :

(1) لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x}{x^6 \ln x}$  , لنصل بها إلى أحد الأشكال السابقة بالطريقة الآتية

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x}{x^6 \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x}{x^6} \times \frac{x}{\ln x}$  وبتطبيق قواعد التزايد المقارن نتحصل على

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x}{x^6} = +\infty$  والنتيجة هي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x}{x^6 \ln x} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

(2) لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - x^4 \ln x)$  , لنصل بها إلى أحد الأشكال السابقة بالطريقة الآتية

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - x^4 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

(3) لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2}$  , لنصل بها إلى أحد الأشكال السابقة بالطريقة الآتية :

نضع  $X = \frac{1}{x-2}$  , لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X e^X = 0$  وبالتالى  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2} = 0$

(2) المعادلة  $3^{-x} = 6$  تكافئ  $e^{-x \ln 3} = e^{\ln 6}$  ,  
تكافئ  $-x \ln 3 = \ln 6$  ومنه  $x = -\frac{\ln 6}{\ln 3}$

(3) المعادلة  $0.7^x = 3$  تكافئ  $e^{x \ln 0.7} = e^{\ln 3}$  ,  
تكافئ  $x \ln 0.7 = \ln 3$  ومنه  $x = \frac{\ln 3}{\ln 0.7}$

(4) المعادلة  $2^x = 3 \times 5^x$  تكافئ  $\frac{2^x}{5^x} = 3$

تكافئ  $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 3$  أي أن  $e^{x \ln \frac{2}{5}} = e^{\ln 3}$

ومنه  $x = \frac{\ln 3}{\ln \frac{2}{5}}$

(5) المعادلة  $2^x \times 5^x = 3$  تكافئ  $10^x = 3$  ,  
تكافئ  $e^{x \ln 10} = e^{\ln 3}$  أي أن  $x \ln 10 = \ln 3$

ومنه  $x = \frac{\ln 3}{\ln 10}$

(6) المعادلة  $2 \times 5^{2x} - 3 \times 5^x + 1 = 0$  تكافئ  $\begin{cases} X = 5^x \\ 2X^2 - 3X + 1 = 0 \end{cases}$

ومنه المعادلة  $2X^2 - 3X + 1 = 0$  تكافئ  $(X = 1 \text{ أو } X = \frac{1}{2})$

• من أجل  $X = 1$  , المعادلة  $X = 5^x$  تكافئ  $5^x = 1$  ومنه  $x = 0$  .

• من أجل  $X = \frac{1}{2}$  , المعادلة  $X = 5^x$  تكافئ  $5^x = \frac{1}{2}$  أي  $e^{x \ln 5} = e^{\ln \frac{1}{2}}$

ومنه  $x = -\frac{\ln 2}{\ln 5}$  , وبالتالي مجموعة الحلول هي :  $\left\{-\frac{\ln 2}{\ln 5}, 0\right\}$

التزايد المقارن للدوال الأسية ودوال القوى واللوغاريتمات :

نستعمل المقارنة بين تزايد الدوال  $x \mapsto x^n$  و  $x \mapsto \ln x$  و  $x \mapsto -x$  على الترتيب - لرفع بعض حالات عدم التعيين التي نصادفها أثناء حساب نهايات الدوال .  
لدينا من أجل  $n \in \mathbb{N}$  ,

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$  (لأن في اللانهاية تتفوق الدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتمية) .



مستمرتان على هذا المجال .

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

**ملاحظة :** إن الهدف من هذا العمل ، هو التخلص من الحد الذي يعيق إيجاد الدالة الأصلية . فإذا كانت  $f(x)$  من الشكل  $\sin x$  (كثير حدود) أو من الشكل  $\cos x$  (كثير حدود) يُصبح بوضع  $u(x)$  (كثير الحدود) . كما في المثال الآتي :

$$\int_0^\pi 2x \cos x dx = \left[ \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{\sin x}_v \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{2}_{u'} \underbrace{\sin x}_v dx = 0 - [-2 \cos x]_0^\pi = -4$$

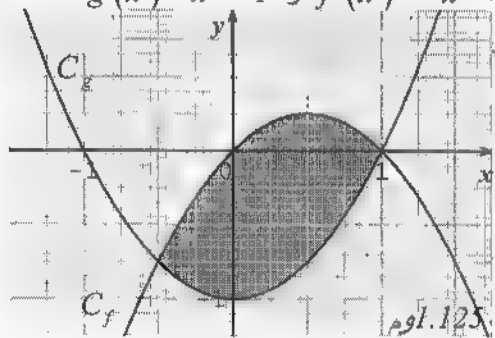
**حساب المساحات** :  $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على مجال  $[a, b]$  ، المستوي منسوب إلى معلم متعامد .

إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a, b]$  ،  $f(x) \geq g(x)$  ، فإن  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني هاتين الدالتين (محصور بينهما) والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad \text{حيث } x=a \text{ و } x=b \text{ هي (بوحددة المساحة المعطاة)}$$

**مثال** : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين معرفتين كما يلي :  $f(x) = -x^2 + x$  و  $g(x) = x^2 - 1$



إن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالتين والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$$x = -\frac{1}{2} \text{ و } x = 1 \text{ هي :}$$

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [f(x) - g(x)] dx \quad \text{(و. م.)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [(-x^2 + x) - (x^2 - 1)] dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + x + 1) dx = \left[ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

ولدينا

**الحساب التكاملي** : لتكن  $f$  دالة مستمرة على مجال  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad \text{حيث } G \text{ دالة أصلية للدالة } f \text{ على } [a, b].$$

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a) \quad \text{شكل آخر :}$$

**مثال** : لحساب  $\int_1^2 -\frac{1}{x^2} dx$  ننجز المراحل الثلاث الآتية :

• نعين دالة أصلية للدالة  $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  على المجال  $[1, 2]$  ولتكن  $G$  حيث  $G(x) = \frac{1}{x}$

• نحسب  $G(1)$  و  $G(2)$  فنحصل على النتيجة :  $G(1) = 1$  و  $G(2) = \frac{1}{2}$

$$\int_1^2 -\frac{1}{x^2} dx = G(2) - G(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

**خواص التكامل** :  $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على  $[a, b]$  ،  $\mathcal{C}$  من  $[a, b]$  .

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{(علاقة شال Chasles)}$$

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{(خطية التكامل)}$$

$$\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

• وإذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a, b]$  ،  $f(x) \geq g(x)$  فإن

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

• وإذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a, b]$  ،  $m \leq f(x) \leq M$  فإن

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \text{(حصر القيمة المتوسطة للدالة } f \text{ على } [a, b])$$

**التكامل بالتجزئة** :  $u$  و  $v$  دالتا قابلتان للاشتقاق على مجال  $[a, b]$  و دالتاهما المشتقتان

$$\int_2^e \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \quad (12, \int_2^3 x+2+\frac{4}{x-1} dx \quad (11, \int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx \quad (10$$

$$\int_e^2 \frac{1}{x \ln x} dx \quad (15, \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx \quad (14, \int_{-2}^0 1+\frac{3}{2x+1}+\frac{3}{2x-6} dx \quad (13$$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{2e^{3x}-e^x-5}{e^x} dx \quad (18, \int_1^2 \frac{e^x+1}{e^x} dx \quad (17, \int_0^{\ln 2} (e^x-e^{2x}) dx \quad (16$$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx \quad (19$$



$$\int_2^3 (x^2+1) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x \right]_2^3 = (9+3) - \left( \frac{8}{3}+2 \right) = \frac{22}{3} = 7.33 \quad (1$$

$$\int_1^2 \left( 3x+1+\frac{2}{x} \right) dx = \left[ \frac{3}{2}x^2 + x + 2\ln x \right]_1^2 = (8+2\ln 2) - \left( \frac{3}{2}+1 \right) \quad (2$$

$$= (8+2\ln 2) - \left( \frac{3}{2}+1 \right) = 6.88$$

(3) إذا وضعنا  $u(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$  فإن  $u'(x) = x - 1$

إذن  $\int_0^2 (x-1) \left( \frac{x^2}{2} - x + 3 \right) dx = \int_0^2 u'(x) \times u(x) dx = \left[ \frac{1}{2} (u(x))^2 \right]_0^2$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x + 3 \right)^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} (9-9) = 0$$

(4) إذا وضعنا  $u(x) = 2x+1$  فإن  $u'(x) = 2$

إذن  $\int_1^0 (2x+1)^3 dx = \int_1^0 \frac{1}{2} u'(x) \times (u(x))^3 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (u(x))^4 \right]_{-1}^0$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (2x+1)^4 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{8} (1-1) = 0$$

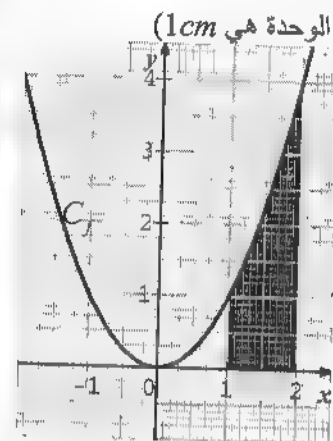
(5) إذا وضعنا  $u(x) = x^2+1$  فإن  $u'(x) = 2x$

$$= \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{8} = 1.125$$

ومنه مساحة الحيز المستوي هي : (وحدة مساحة)  $\mathcal{A} = 1.125$

وإذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a, b]$  ،  $f(x) \geq 0$  فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة  $f$  والمستقيمتين التي معادلاتها :  $x=a$  و  $x=b$  و  $y=0$

هي  $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$  (بوحددة المساحة المعطاة)



مثال : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الوحدة هي 1cm)

لتكن  $f(x) = x^2$  دالة معرفة كما يلي :

إن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة  $f$  والمستقيمتين التي معادلاتها :  $x=1$  و  $x=2$  و  $y=0$  هي

$$\mathcal{A} = \int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33 \text{ cm}^2$$

وإذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a, b]$  ،  $f(x) \leq 0$  فإن مساحة الحيز المستوي

المحدد بمنحني الدالة  $f$  والمستقيمتين التي معادلاتها :  $x=a$  و  $x=b$  و  $y=0$

هي  $\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$  (بوحددة المساحة المعطاة)



احسب التكاملات الآتية

(1)  $\int_2^3 (x^2+1) dx$  (2)  $\int_1^2 \left( 3x+1+\frac{2}{x} \right) dx$  (3)  $\int_0^2 (x-1) \left( \frac{x^2}{2} - x + 3 \right) dx$

(4)  $\int_{-1}^0 (2x+1)^3 dx$  (5)  $\int_{-2}^3 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$  (6)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} dx$

(7)  $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx$  (8)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$  (9)  $\int_1^2 \frac{2-4x}{\sqrt{x^2-x+3}} dx$

$$\int_2^0 \left(1 + \frac{3}{2x+1} + \frac{3}{2x-6}\right) dx = \int_2^0 \left(1 + \frac{3}{2} \times \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{2x-6}\right) dx \quad (13)$$

$$= \left[ x' + \frac{3}{2} \ln|2x+1| + \frac{3}{2} \ln|2x-6| \right]_{-2}^0$$

$$= \left( \frac{3}{2} \ln 6 \right) - \left( -2 + \frac{3}{2} \ln 3 + \frac{3}{2} \ln 10 \right) = 2 + \frac{3}{2} (\ln 6 - \ln 3 - \ln 10)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \times \ln(x+1) dx \quad (14)$$

$$= \left[ \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln 2 \quad (15)$$

$$\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x}) dx = \int_0^{\ln 2} \left( e^x - \frac{1}{2} \times 2e^{2x} \right) dx \quad (16)$$

$$= \left[ e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2} = \left( 2 - \frac{1}{2} \times 4 \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{e^x + 1}{e^x} dx = \int_1^2 \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right) dx = \int_1^2 (1 - (-e^{-x})) dx = [x - e^{-x}]_1^2 \quad (17)$$

$$= \left( 2 - \frac{1}{e^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e}$$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{2e^{3x} - e^x - 5}{e^x} dx = \int_0^{\ln 3} (2e^{2x} - 1 - 5e^{-x}) dx = \left[ e^{2x} - x + \frac{5}{e^x} \right]_0^{\ln 3} \quad (18)$$

$$= \left( 9 - \ln 3 + \frac{5}{3} \right) - (1 + 5) = \frac{14}{3} - \ln 3$$

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-x^2} dx = \left[ -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \quad (19)$$

$$\int_{-2}^3 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \int_{-2}^3 \frac{u'(x)}{(u(x))^2} dx = \left[ \frac{-1}{u(x)} \right]_{-2}^3 \quad \text{إذن}$$

$$= \left[ \frac{-1}{x^2+1} \right]_{-2}^3 = \left( -\frac{1}{10} \right) - \left( -\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{10}$$

(6) إذا وضعنا  $u(x) = x^2 + 1$  فإن  $u'(x) = 2x$  .

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2u'(x)}{u(x)} dx = 2 [\ln(u(x))]_0^{\sqrt{3}} \quad \text{إذن}$$

$$= 2 [\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} = 2 [\ln 4 - 0] = 2 \ln 4$$

(7) إذا وضعنا  $u(x) = x + 3$  فإن  $u'(x) = 1$  . ويكون لدينا

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = \int_{-2}^1 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = [2\sqrt{u(x)}]_{-2}^1 = [2\sqrt{x+3}]_{-2}^1 = 4 - 2 = 2$$

**ملاحظة :** بتطبيق الطرق السابقة يمكننا معالجة بقية التمارين بسرعة أكبر.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 \quad (8)$$

$$\int_1^2 \frac{2-4x}{\sqrt{x^2-x+3}} dx = -2 \int_1^2 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+3}} dx = -4 [\sqrt{x^2-x+3}]_1^2 \quad (9)$$

$$= -4(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \frac{1}{3} [(\ln x)^3]_1^e = \frac{1}{3} (1 - 0) = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\int_2^3 \left( x + 2 + \frac{4}{x-1} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 + 2x + 4 \ln(x-1) \right]_2^3 \quad (11)$$

$$= \left( \frac{9}{2} + 6 + 4 \ln 2 \right) - (2 + 4 + 0) = \frac{9}{2} + 4 \ln 2$$

$$\int_2^e \frac{1}{x (\ln x)^2} dx = \int_2^e \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} dx = \left[ \frac{-1}{\ln x} \right]_2^e = (-1) - \left( \frac{-1}{\ln 2} \right) = -1 + \frac{1}{\ln 2} \quad (12)$$

(1) عين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x$ .

(2) استنتج قيمة  $\int_1^{e^2} \left(x \ln x + \frac{x}{2}\right) dx$ .

الحل

(1) من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ,  $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x = x \ln x + \frac{1}{2}x$

إذن الدالة  $f$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto x \ln x + \frac{1}{2}x$  على  $]0, +\infty[$ .

(2)  $\int_1^{e^2} \left(x \ln x + \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^{e^2} = e^4$

التمرين 77

احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $I$  في الحالات الآتية :

(1)  $I = [-3, 1]$  ,  $f(x) = 2x - 1$

(2)  $I = [0, e-1]$  ,  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(3)  $I = [0, 4]$  ,  $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$

الحل

(1)  $\frac{1}{1-(-3)} \int_{-3}^1 (2x-1) dx = \frac{1}{4} [x^2 - x]_{-3}^1 = \frac{1}{4} (12-0) = 3$

(2)  $\frac{1}{(e-1)-(0)} \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{e-1} [\ln(x+1)]_0^{e-1} = \frac{1}{e-1} (1-0) = \frac{1}{e-1}$

(3)  $\frac{1}{4-(0)} \int_0^4 \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2+9) \right]_0^4 = \frac{1}{8} (\ln 25 - \ln 9)$

التمرين 78

اشترت شركة آلة بمبلغ قدره 500000 د.ج. يمكن لهذه الشركة أن تباع هذه الآلة

بعد  $t$  من السنوات بمبلغ  $V(t)$  , حيث  $V(t) = \frac{500000}{0.5t+1}$  (بالد.ج.).

وهذا من أجل  $0 < t < 8$ .

(1) بعد كم سنة تفقد الآلة 50% من ثمن شرائها؟

(2) احسب القيمة المتوسطة لثمن البيع في الفترة  $[0, 4]$ .

الحل

(1) إن 50% من ثمن الشراء تقدر بـ 250000 د.ج.

نضع  $V(t) = 250000$  ومنه  $\frac{500000}{0.5t+1} = 250000$  يكافئ  $0.5t+1=2$

ومنه  $t=4$  . إذن بعد 4 سنوات تفقد الآلة 50% من ثمن شرائها.

(2) القيمة المتوسطة لثمن البيع في الفترة  $[0, 4]$ .

$\frac{1}{4-0} \int_0^4 \frac{500000}{0.5t+1} dt = 250000 \int_0^4 \frac{0.5}{0.5t+1} dt$   
 $= 250000 [\ln(0.5t+1)]_0^4 = 250000 (\ln 3 - 0) \approx 274653 \text{ DA}$

التمرين 79

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 9x^2 + 4x$ .

(1) عين  $V_m$  القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[0, 2]$ .

(2) عين عددا حقيقيا  $c$  من  $[0, 2]$  , بحيث  $V_m = f(c)$ .

الحل

(1) القيمة المتوسطة  $V_m$  للدالة  $f$  على المجال  $[0, 2]$ .

$$V_m = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (9x^2 + 4x) dx = \frac{1}{2} [3x^3 + 2x^2]_0^2 = \frac{1}{2} (32 - 0) = 16$$

(2) تعيين  $c$  من  $[0, 2]$  بحيث  $V_m = f(c)$ .  
 $9c^2 + 4c - 16 = 0$  يكافئ  $9c^2 + 4c = 16$  وهذا يكافئ  $V_m = f(c)$   
 وبحل هذه المعادلة نجد  $c \approx 1.13$

التمرين 80

لنكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

(1) بين أنه من أجل كل  $x \geq 2$ ،  $\frac{1}{2x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$

(2) استنتج حصرا للتكامل الآتي:  $\int_2^3 f(x) dx$

الحل

(1) لدينا  $\frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{x^2}$  ومنه  $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$  ... (أ)

ولدينا  $x \geq 2$  تكافئ  $x^2 \geq 4$  وتكافئ، أيضا،  $2x^2 \geq 4 + x^2$

ومنه  $f(x) \geq \frac{1}{2x^2}$  وبالتالي:  $\frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{4+x^2} \leq \frac{1}{3+x^2}$  ... (ب)

والخلاصة: من (أ) و (ب) نجد  $\frac{1}{2x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$

(2) بما أن  $\frac{1}{2x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$  فإن  $\int_2^3 \frac{1}{2x^2} dx \leq \int_2^3 f(x) dx \leq \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$

بما أن  $\int_2^3 \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$  و  $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

فإن  $\frac{1}{12} \leq \int_2^3 f(x) dx \leq \frac{1}{6}$

التمرين 81

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة هي cm)

احسب  $\mathcal{A}$ ، بم  $cm^2$ ، مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني  $\mathcal{C}$  الممثل للدالة  $f$  في الحالات الآتية:

(1)  $f(x) = 3x^2 + 1$ ، من أجل  $1 \leq x \leq 2$

(2)  $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ ، من أجل  $3 \leq x \leq 4$

(3)  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ، من أجل  $0 \leq x \leq 4$

الحل

(1) ندرس إشارة  $f(x)$  من أجل كل  $1 \leq x \leq 2$

نلاحظ أنه من أجل كل  $1 \leq x \leq 2$ ،  $f(x) \geq 0$  وبالتالي

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (3x^2 + 1) dx = [x^3 + x]_1^2 = (8 + 2) - (1 + 1) = 8 cm^2$$

(2) ندرس إشارة  $f(x)$  من أجل كل  $3 \leq x \leq 4$

نستنتج أنه من أجل كل  $3 \leq x \leq 4$ ،  $f(x) \leq 0$  وبالتالي

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\int_3^4 (-x^2 + 5x - 6) dx = -\left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x \right]_3^4 \\ &= -\left[ \left( -\frac{64}{3} + 40 - 24 \right) - \left( -9 + \frac{45}{2} - 18 \right) \right] \approx 0.83 cm^2 \end{aligned}$$

(3) ندرس إشارة  $f(x)$  من أجل كل  $0 \leq x \leq 4$ . فنستنتج أن:

• من أجل كل  $0 \leq x \leq 3$ ،  $f(x) \geq 0$

• من أجل كل  $3 \leq x \leq 4$ ،  $f(x) \leq 0$ ، بالتالي:

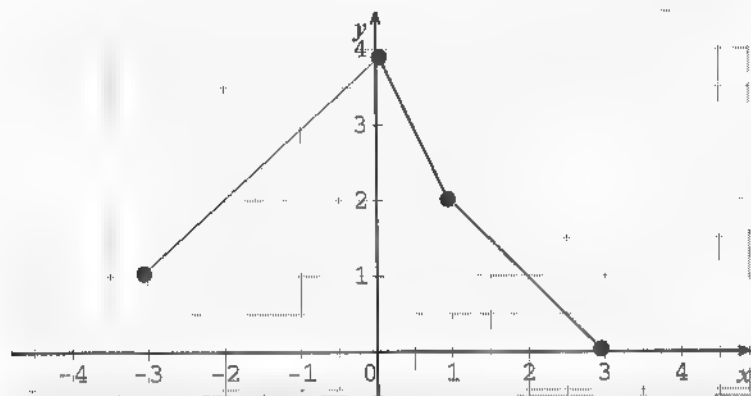
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx - \int_3^4 (-x^2 + 2x + 3) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^3 - \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_3^4 = \frac{34}{3} cm^2 \end{aligned}$$

التمرين 82

لنكن  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على  $\left[ \frac{5}{2}, 5 \right]$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  و  $g(x) = \frac{1}{x-2}$

التمرين 83

من أجل  $-3 \leq x \leq 3$ ، احسب  $\mathcal{A}$ ، بـ  $cm^2$ ، مساحة الحيز المستوي المحصور بين محور الفواصل والمنحني الممثل للدالة التآلفية، كما في الشكل الآتي:



الحل

لتكن الدالة التآلفية  $f$  المعرفة كما يلي:

حيث  $a$  و  $b$  عدادان حقيقيان و  $a \neq 0$ ،  $f(x) = ax + b$

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

إذن

• لنعين عبارة  $f$  على  $[-3, 0]$ .

نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة التي إحداثياتها  $(-3, 1)$  وبالنقطة التي إحداثياتها  $(0, 4)$ .

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \text{ أي أن } \begin{cases} -3a + b = 1 \\ b = 4 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } \begin{cases} f(-3) = 1 \\ f(0) = 4 \end{cases} \text{ لدينا}$$

والخلاصة: عبارة الدالة  $f$  هي:  $f(x) = x + 4$ .

• لنعين عبارة  $f$  على  $[0, 1]$ .

نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة التي إحداثياتها  $(0, 4)$  وبالنقطة التي إحداثياتها  $(1, 2)$ .

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \text{ أي أن } \begin{cases} b = 4 \\ a + b - 2 = 2 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } \begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 2 \end{cases} \text{ لدينا}$$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة هي  $2cm$ )

$C_g$  و  $C_f$  المنحنيان الممثلان، على الترتيب، للدالتين  $f$  و  $g$ .

(1) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين  $C_g$  و  $C_f$  على  $\left[\frac{5}{2}, 5\right]$ .

(2) احسب  $\mathcal{A}$ ، بـ  $cm^2$ ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $C_g$  و  $C_f$

والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = \frac{5}{2}$  و  $x = 3$ .

الحل

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{-x+3}{(x-2)(x-1)}$$

(1) ليكن الفرق

نلاحظ أنه من أجل كل  $x$  من  $\left[\frac{5}{2}, 5\right]$ ،  $x-2 > 0$  و  $x-1 > 0$ ،

أي  $(x-2)(x-1) > 0$  ومنه إشارة الفرق من إشارة  $-x+3$  وبالتالي

$x$	$\frac{5}{2}$	3	5
$f(x) - g(x)$	+	0	-
الوضعية	$C_g$ فوق $C_f$	$C_g$ يقطع $C_f$	$C_g$ تحت $C_f$

(2) بما أنه من أجل كل  $x$  من  $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ ،  $f(x) - g(x) \geq 0$ ، فإن

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{5}{2}}^3 (f(x) - g(x)) dx = [\ln(x-2) - \ln(x-1)]_{\frac{5}{2}}^3$$

$$= \left[ \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) \right]_{\frac{5}{2}}^3 = \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) \times 4cm^2 = (\ln 3 - \ln 2) \times 4cm^2 \approx 1.6cm^2$$

إن معادلة الجزء (BC) هي من الشكل  $y = -ax + b$  لأنه جزء من منحن يمثل دالة تالفية ويشمل النقطتين  $C(3,0), B(1,1)$ .

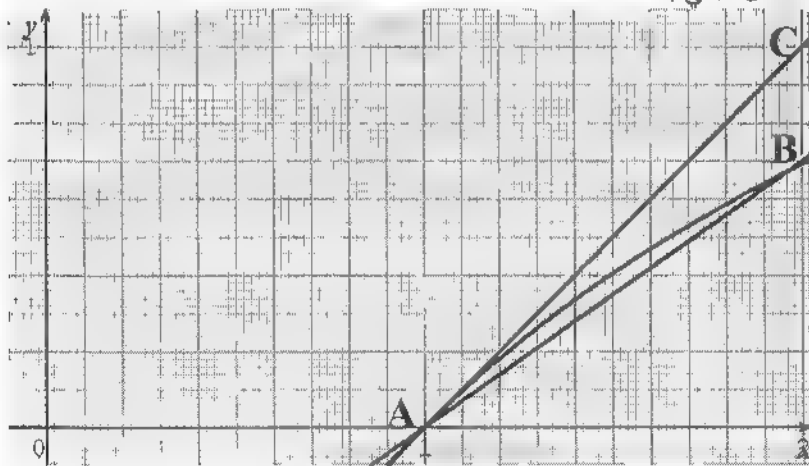
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ وهذه الجملة تكافئ}$$

وبالتالي معادلة (BC) هي  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  ومنه المساحة  $\mathcal{A}$  هي:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} + \left[\left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{4}{3} \text{ (وحدة مساحة)} \end{aligned}$$

التمرين 85

ليكن الشكل الآتي:



إن المنحني ذا المعادلة  $y = \ln x$  محصور بالقطعتين [AB] و [AC] حيث

$$\int_1^2 \ln x dx \text{ عين حصرا للتكامل } C(2,1), B(2, \ln 2), A(1,0)$$

والخلاصة: عبارة الدالة  $f$  هي  $f(x) = -2x + 4$

• لنعين عبارة  $f$  على  $[1,3]$ .

نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة التي إحداثياتها (1,2) وبالنقطة التي إحداثياتها (3,0).

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(3) = 0 \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ أي أنه}$$

والخلاصة: عبارة الدالة  $f$  هي  $f(x) = -x + 3$

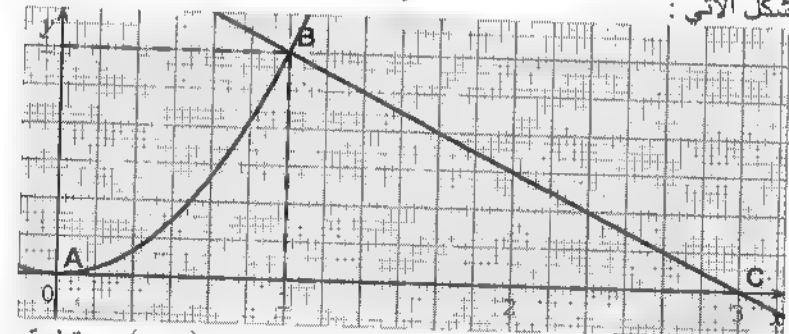
$$\mathcal{A} = \int_{-3}^0 (x+4) dx + \int_0^1 (-2x+4) dx + \int_1^3 (-x+3) dx$$

ومنه

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-3}^0 + \left[-x^2 + 4x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_1^3 \\ &= (0) - \left(\frac{9}{2} - 12\right) + (3) - (0) + \left(-\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-\frac{1}{2} + 3\right) \\ &= \frac{25}{2} = 12.5 \text{ (وحدة مساحة)} \end{aligned}$$

التمرين 84

ليكن الشكل الآتي:



إن معادلة جزء المنحني (AB) هي  $y = x^2$  و جزء المنحني (BC) هي قطعة من

مستقيم.

احسب  $\mathcal{A}$ , بوحدة المساحة, مساحة الحيز المستوي المحصور بين محور الفواصل

والجزئين (AB) و (BC).

الحل

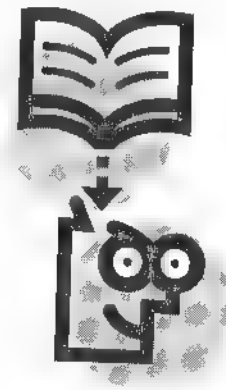
لنعين معادلة جزء المنحني (BC).

قوم نفسك  
في الدوال

الحل

إن التكامل  $\int_1^2 \ln x \, dx$  هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني الممثل للدالة  $x \mapsto \ln x$  ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 1$  و  $x = 2$ .  
من الشكل نستنتج أن المساحة محصورة بين مساحة المثلث  $ACH$  والمثلث  $ABH$ .  
وبالتالي مساحة المثلث  $ACH \geq \int_1^2 \ln x \, dx \geq$  مساحة المثلث  $ABH$ .  
أي أن  $\frac{\ln 2}{2} \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq \frac{1}{2}$

ليونارد أولر Euler Leonhard (1707 – 1783)  
من أكبر العلماء الذين عرفهم التاريخ ، استقر في البداية  
ببترسبورغ ثم في برلين سنة 1741 حيث ترأس أكاديمية العلوم  
إلى غاية 1766 ، تخصص في :  
علم الفلك ( دراسة مسار المجرات ) .  
علم الفيزياء ( الحقل المغناطيسي ، البصريات ... ) .  
الرياضيات ( الحساب ، الهندسة التفاضلية ، التحليل الرقمي  
والوظيفي ، حساب تغيرات البيانات ، المساحات  
الجبرية ، معادلة أولر ... ) .  
وهو أحد مؤسسي التحليل الوظيفي و المعادلات التفاضلية .





## 5 نقاط

## التمرين 1

1. لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$  كما يلي :  
يعطي ، في الأسفل ، جدول تغيرات  $g$  .

$x$	0	2,3	$x_0$	2,4	$+\infty$
$g$	$-\infty$		0		$+\infty$

برهن كل خصائص الدالة  $g$  الواردة في هذا الجدول.

2. لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$

(a) برهن أن  $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$  حيث  $x_0$  هو العدد الحقيقي الظاهر في الجدول أعلاه.

(b) ليكن  $a$  عددا حقيقيا من أجل  $a > 1$  ، عبر عن  $\int_1^a f(t) dt$  بدلالة  $a$  .

3. لقد رسمنا في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (في الأسفل) المنحنيين الممثلين

للدالتين  $f$  و  $g$  ورمزهما  $(C_f)$  و  $(C_g)$  .

لتكن  $I$  نقطة إحداثياتها  $(1, 0)$  و  $p_0$  نقطة تقاطع  $(C_g)$  مع محور الفواصل و  $M_0$  نقطة

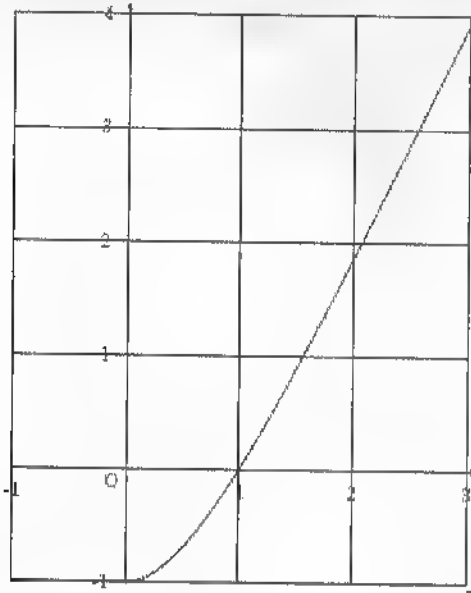
من  $(C_f)$  لها نفس فاصلة  $p_0$  و  $H_0$  المسقط العمودي للنقطة  $M_0$  على محور الترتيب.

نرمز بالرمز  $\mathcal{D}_1$  للحيز المستوي المحدود بالمنحني  $(C_f)$  والقطعتين  $[IP_0]$  و  $[P_0M_0]$

نرمز بالرمز  $\mathcal{D}_2$  للحيز المستوي المحدود بالمستطيل المرسوم انطلاقا من  $[OI]$  و  $[OH_0]$

برهن أن الحيزين  $\mathcal{D}_1$  و  $\mathcal{D}_2$  لهما نفس المساحة ثم أعط حصرا لهذه المساحة بسعة 0.2.

(b) احسب  $\Delta$  المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $\Delta$ .



نقاط

### التمرين 3

الجزء أ

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = e^{-2x} + 2x - 1$

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2. (a) من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، احسب  $g'(x)$ .

(b) أنجز جدول تغيرات الدالة  $g$ .

(c) من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، استنتج إشارة  $g(x)$ .

الجزء ب

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + 2 + (x-1)e^{2x}$

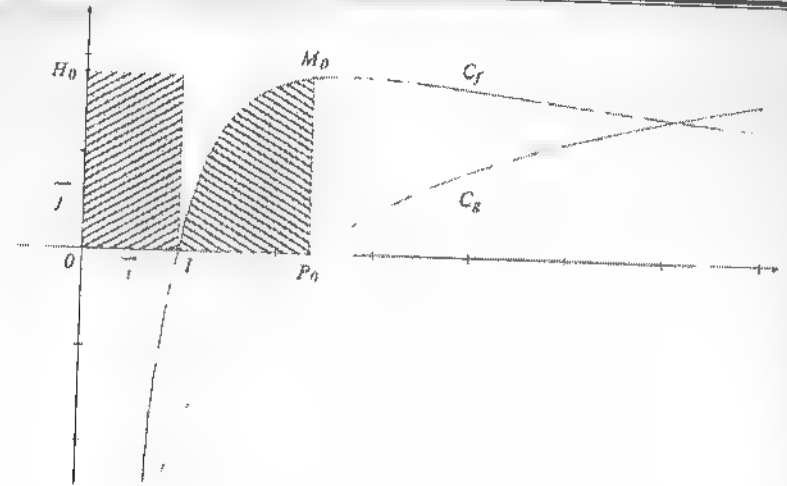
وليكن  $\mathcal{C}$  المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس .

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. (a) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = g(x)e^{2x}$ .

(b) أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3. (a) بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x + 2$  مقارب مائل للمنحني  $\mathcal{C}$  في



5 نقاط

### التمرين 2

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$

$\mathcal{C}$  المنحني الممثل لها مرسوم (في الأسفل) في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الرسم

هي 2cm)

1. (a) ادرس نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ .

(b) بين أن المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = 2x - 2$  مقارب للمنحني  $\mathcal{C}$ .

(c) ادرس الوضعية النسبية للمنحني  $\mathcal{C}$  والمستقيم  $\Delta$ .

2. (a) احسب  $f'(x)$  و بين أن  $f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$ .

(b) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما ،  $f'(x) > 0$ .

(c) عين قيمة  $f'(0)$  ثم أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3. باستعمال التكامل بالتجزئة ، احسب بال  $\text{cm}^2$  مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني

$\mathcal{C}$  والمستقيم  $\Delta$  والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 1$  و  $x = 3$ .

4. (a) عين النقطة  $A$  من  $\mathcal{C}$  والتي يكون فيها المماس للمنحني  $\mathcal{C}$  موازيا للمستقيم  $\Delta$ .

الجزء ٢ : حجم حساب حجم .

ليكن  $\lambda$  عدد حقيقيا موجبا ، نرمز بالرمز  $V(\lambda)$  للتكامل  $\int_{-\lambda}^0 [f(x)]^2 dx$ .نقبل أن قياس الحجم المتولد عن الدوران حول محور الفواصل لجزء المنحني  $\mathcal{C}$  من أجل  $-\lambda \leq x \leq 0$  ، هو  $V(\lambda)$  معطى بوحدة الحجم .1. عين العددين  $a$  و  $b$  ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، لدينا :

$$\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$$

2. عبر عن  $V(\lambda)$  بدلالة  $\lambda$  .3. عين نهاية  $V(\lambda)$  عندما ينتهي  $\lambda$  إلى  $+\infty$  .

## 7 نقاط

## التمرين 5

$$f(x) = x + 1 - e^{x+1}, \quad x \leq -1$$

لتكن الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x + \ln(x^3 - 3x + 3), \quad x \geq 1$$

(C) هو المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

الجزء أ :

من أجل كل  $x$  من  $[1, +\infty[$  نضع  $g(x) = x^3 - 3x + 3$  .1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $[1, +\infty[$  .(b) استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $[1, +\infty[$  ،  $g(x) > 0$  .

2. استنتج ما يلي :

$$D_f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

(b) من أجل كل  $x$  من  $[1, +\infty[$  ،  $f(x) \geq x$  .(c) المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $[1, +\infty[$  .

الجزء ب :

1. (a) بين أن  $f'_g(-1) = 0$  ثم فسر النتيجة بيانيا .(b) بين أن  $f'_g(1) = 1$  ثم فسر النتيجة بيانيا .2. بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $[1, +\infty[$  و  $]-\infty, -1]$  .3. (a) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل للمنحني في جوار  $-\infty$  .جوار  $-\infty$  .(b) ادرس الفرع اللانهائي للمنحني  $\mathcal{C}$  في جوار  $+\infty$  .4. ادرس الوضعية النسبية للمنحني  $\mathcal{C}$  والمستقيم  $(D)$  .5. بين أن المنحني  $\mathcal{C}$  يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $\alpha$  بحيث  $-2 < \alpha < -1$  .6. أنشئ المنحني  $\mathcal{C}$  .7. (a) بين أن الدالة  $h$  اقتصار  $f$  على المجال  $I = [0, +\infty[$  تقبل دالة عكسية  $h^{-1}$  ، عين

مجال تعريفها .

(b) أنشئ في نفس المعلم المنحني  $\mathcal{C}'$  الممثل للدالة  $h^{-1}$  .8. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني  $\mathcal{C}$  ومحور الترتيب والمستقيمينالذين معادلاتهما  $x = 1$  و  $y = x + 2$  .

## 7 نقاط

## التمرين 4

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  .وليكن  $\mathcal{C}$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

(وحدة الرسم : 5cm)

الجزء أ : دراسة الدالة  $f$  .1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  .عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  . فسر بيانيا النتائج المتحصل عليها .احسب  $f'(x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  . استنتج تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  .ارسم المنحني  $\mathcal{C}$  ومستقيمي المقاربين في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

الجزء ب : بعض الخواص البيانية .

1. نعتبر النقطتين  $M$  و  $M'$  من المنحني  $\mathcal{C}$  فاصلتهما على الترتيب  $x$  و  $-x$  .عين احداثي  $A$  منتصف القطعة  $[MM']$  . ماذا تمثل النقطة  $A$  للمنحني  $\mathcal{C}$  ؟2. ليكن  $n$  عدد طبيعيا . نرمز بالرمز  $D_n$  للحيز المستوي المحدود بالمستقيم ذيالمعادلة  $y = 1$  والمنحني  $\mathcal{C}$  والمستقيمين اللذين معادلاتهما  $x = 0$  و  $x = n$  .نرمز بالرمز  $\mathcal{A}_n$  لمساحة الحيز  $D_n$  معطاة بوحدة المساحة .a. احسب  $\mathcal{A}_n$  .b. ادرس نهاية  $\mathcal{A}_n$  ، عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$  .

(b) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) مع (Δ).

4. (a) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[1, +\infty[$ ،  $f(x) = x + 3 \ln x + \ln\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$ .

(b) ادرس الفرع اللانهائي للمنحني (C) في جوار  $+\infty$ .

5. أنشئ المنحني (C).

6. ليكن  $h$  اقتصار الدالة  $f$  على المجال  $[1, +\infty[$ .

(a) بين أن  $h$  تقابل من المجال  $[1, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يطلب تعيينه.

(b) أنشئ، نفس المعلم، المنحني الممثل للدالة  $h^{-1}$ .

الجزء 2

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$ ،  $u_{n+1} = h^{-1}(u_n)$ ،  $n \in \mathbb{N}$ .

(يمكنك استعمال نتائج دراسة الدالة  $f$  على  $[1, +\infty[$ )

1. بين بالتراجع أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_n \geq 1$ .

2. بين أن  $(u_n)$  متناقصة (يمكنك استعمال الجزء 1-2-b)

3. استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب نهايتها.

9 نقاط

### التمرين 6

الجزء 1

لتكن الدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = e \ln x - x$ .

وليكن  $(C_g)$  المنحني الممثل للدالة  $g$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $g$ .

2. (a) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

(b) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ثم تحقق من أن المنحني  $(C_g)$  يقبل المستقيم (Δ) الذي

معادلته  $y = -x$  كاتجاه مقارب في جوار  $+\infty$ .

3. (a) عين الدالة المشتقة  $g'(x)$  ثم درس إشارتها من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ .

(b) احسب  $g(e)$ .

(c) أنجز جدول تغيرات لدالة  $g$ .

(d) استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $]0, e[ \cup ]e, +\infty[$ ،  $g(x) < 0$ .

4. (a) عين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المنحني  $(C_g)$  ثم ادرس وضعهما النسبي.

(b) أنشئ  $(C_g)$ .

الجزء 2

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $x > 0$ ،  $f(x) = e(x - x \ln x) + \frac{x^2}{2}$ ،  $f(0) = 0$ .

وليكن  $(C_f)$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. (a) بين أن  $f$  مستمرة على اليمين عند 0.

(b) بين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ثم استنتج دراسة الفرع اللانهائي

للمنحني  $(C_f)$ .

(c) ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين عند 0. فسر النتيجة هندسيا.

(d) اثبت أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ ،  $f'(x) = -g(x)$  ثم استنتج جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2. (a) من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ ، احسب  $f''(x)$ . استنتج أن النقطة A ذات الإحداثيين

$\left(e, \frac{e^2}{2}\right)$  نقطة انعطاف للمنحني  $(C_f)$ .

(b) أعط معادلة لمماس المنحني  $(C_f)$  في النقطة A.

3. أنشئ المنحني  $(C_f)$ .

4. عين دالة  $G$  أصلية للدالة  $g$  على المجال  $[1, e]$  ثم احسب  $G(e) - G(1)$ .

5 نقاط

### التمرين 7

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ .

وليكن  $(\mathcal{C})$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  (وحدة الرسم هي 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور الترتيب)

الجزء 1

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = e^x - x - 1$ 1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ . استنتج إشارة  $g$ .2. بين أنه من كل  $x$ ،  $(e^x - x)$  موجب تماما.

الجزء 2

1. احسب نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .  
(b) فسر، بيانيا ، النتيجة المتحصل عليهما.2. احسب  $f'(x)$ .(b) ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أنجز جدول تغيراتها.3. (a) عين معادلة  $(T)$  مماس المنحني  $(\mathcal{C})$  في النقطة ذات الفاصلة 0.(b) باستعمال الجزء 1 ادرس وضعية  $(\mathcal{C})$  بالنسبة إلى المستقيم  $(T)$ .4. ارسم المستقيم  $(T)$  ، المستقيمت المقاربة والمنحني  $(\mathcal{C})$ .

7 نقاط

## التمرين 8

الجزء 1 : دراسة دالة .

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

المنحني الممثل لها  $(\mathcal{C})$  في معلم متعامد معطى في الملحق .1. (a) بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0, +\infty[$ .(b) هل محور الفواصل مماس للمنحني  $(\mathcal{C})$  في النقطة ذات الفاصلة 0 ؟

$$2. \text{ نضع } I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

(a) عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  بحيث من أجل كل  $x \neq -1$ ،

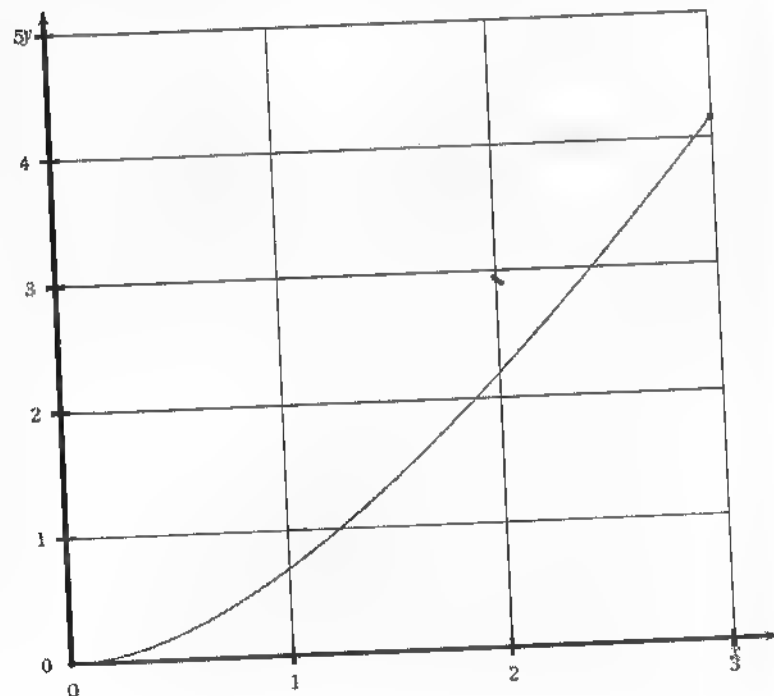
$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

(b) احسب  $I$ .

3. باستعمال التكامل بالتجزئة وباستعمال نتائج السؤال 2 ، احسب ، بوحدة المساحة،

مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني  $(\mathcal{C})$  والمستقيمت التي معادلاتها  $x = 0$ و  $y = 0$  و  $x = 1$ .4. بين أن المعادلة  $f(x) = 0.25$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[0, 1]$ .أعط حصرا للعدد  $\alpha$  بسعة  $10^{-2}$ .

الجزء 1 : دراسة متتالية .

المتتالية  $(u_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ 1. عين اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ،  $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ .استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$ .المنحني  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$ ، متحصل عليه باستعمال مجولReprésentation graphique de la fonction  $f$  obtenue à l'aide d'un tableurCourbe  $(\mathcal{C})$ 

1. (a) بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق وأنه من أجل كل  $x$  موجب تماما ،  $f'(x)$  لها نفس إشارة

$$N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x]$$

(b) احسب  $N(1)$  ثم عين إشارة  $N(x)$  مع تمييز الحالتين  $0 < x < 1$  و  $x > 1$ .  
(c) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $[0, +\infty[$  واستنتج احداثي النقطة من  $\mathcal{C}$  التي لها أكبر ترتيب.

2. ليكن  $(\alpha)$  (بوحد المساحة) مساحة الحيز المستوي الرمادي في الشكل حيث  $\alpha$  عدد حقيقي من المجال  $]0, 1[$ .

(a) عبر عن  $(\alpha)$  بدلالة  $\alpha$  (يمكن الاستعانة بالتكامل بالتجزئة).

(b) احسب نهاية  $(\alpha)$  عندما تنتهي  $\alpha$  إلى 0. أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية.

3. نعرف متتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحدّها الأول  $u_0$  عنصر من المجال  $[1, 2]$  و

$$u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

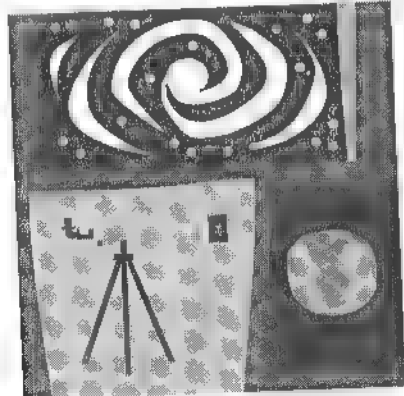
(a) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  عنصر من  $[1, 2]$  ،  $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$ .

(b) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n$  تنتمي إلى  $[1, 2]$ .

4. نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$  ، عين اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

5. (a) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة. نرمز إلى نهايتها بالرمز  $l$ .

(b) عين القيمة المضبوطة للنهاية  $l$ .



6 نقاط

التمرين 9

1. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x^2 e^{1-x}$ .  
وليكن  $(\mathcal{C})$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (وحدة الرسم هي 2cm).

(a) عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ . ماذا تستنتج ، بيانيا ؟  
(b) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ . عين دالتها المشتقة  $f'$ .  
(c) أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  ثم ارسم المنحني  $(\mathcal{C})$ .  
2. ليكن العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$ . نعتبر التكامل  $I_n$  المعروف كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

(a) جد علاقة بين  $I_n$  و  $I_{n+1}$ .

(b) احسب  $I_1$  ثم  $I_2$ .

(c) أعط تفسيرا بيانيا للعدد  $I_2$ . (يمكن الاعتماد على منحني السؤال 1. c).  
3. (a) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0, 1]$  ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ، تكون لدينا المتباينة الآتية :  $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$ .

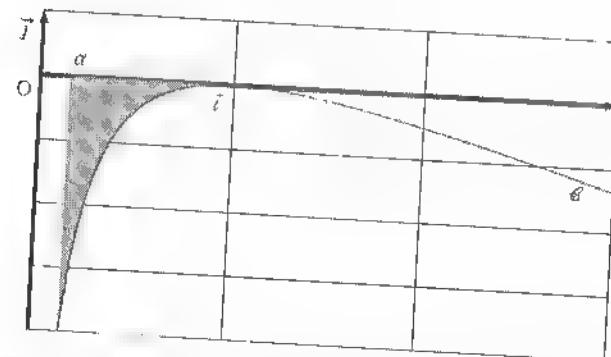
(b) استنتج حصرا للتكامل  $I_n$  ثم استنتج نهاية  $I_n$  عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$ .

6 نقاط

التمرين 10

المنحني  $\mathcal{C}$  الآتي هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$



# المتتاليات العددية

### المتتاليات العددية :

**تعريف :** المتتالية العددية هي دالة معرفة على  $\mathbb{N}$  أو على مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من عدد طبيعي  $n_0$ .

أمثلة : متتالية الأعداد الطبيعية :  $0, 1, 3, 4, 5, 6, \dots$

متتالية المربعات :  $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

و إذا رمزنا بالرمز  $u_n$  إلى صورة عدد طبيعي  $n$  فإن المتتالية نفسها يُرمزُ إليها بالرمز  $u$

أو بالرمز  $(u_n)$  ، ومنه :  $\odot$  فمتتالية المربعات هي  $(u_n)$  مع  $u_n = n^2$ .

$\odot$  ومتتالية الأعداد الطبيعية هي  $(u_n)$  مع  $u_n = n$ .

ونسُمي  $u_n$  : "الحد العام للمتتالية  $(u_n)$ ".

ونسُمي الأعداد الحقيقية :  $u_0, u_1, u_2, \dots$  : "حدود المتتالية  $(u_n)$ ".

كما نسمي  $n$  الذي يظهر في  $u_n$  : "دليل الحد" فمثلا دليل الحد  $u_{14}$  هو 14 وهكذا...

ومنه حدود متتالية المربعات هي :  $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 9, u_4 = 16, u_5 = 25, \dots$

وحدود متتالية الأعداد الطبيعية هي :  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4, \dots$

### تعيين (أو توليد) متتالية عددية :

(1) يسمح وجود الحد العام لمتتالية عددية بحساب أي حد من حدودها لدليله معلوم.

### أمثلة :

•  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = \frac{1}{n+1}$ .

• لنحسب ، مثلا ، الحدين  $u_1$  و  $u_{10}$  وذلك بتعويض  $n$  بـ 1 فنحصل على :  $u_1 = \frac{1}{2}$

و  $n$  بـ 10 فنحصل على :  $u_{10} = \frac{1}{11}$  . وبهذه الطريقة البسيطة يمكن حساب أي حد .

•  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = n^2 + 1$ .

ولدينا :  $u_1 = 2$  و  $u_{10} = 101$ .

–  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$ .

ولدينا :  $u_1 = \frac{1}{3}$  و  $u_{10} = \frac{1}{111}$ .

**ملاحظة :** يمكن أن نعرف المتتالية العددية كما نعرف دالة عددية كما في المثال الآتي :

–  $(u_n)$  متتالية عددية :  $f(n) = 2^n$  و  $n \mapsto f(n)$

وبالتالي :  $f(0) = +1, f(1) = +2, f(2) = 4, f(3) = +9, \dots$

(2) إذا كان الحد الأول لمتتالية عددية معلوما مع وجود علاقة تربط أي حدين متتابعين فإنه

يمكننا حساب أي حد من حدودها بالتراجع . فنحسب الحد الثاني فالثالث فالرابع .....



أو من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < 0$  و  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

(3) نقول عن متتالية عددية  $(u_n)$  إنها **رئيسية تماماً** إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

ملاحظة: إذا استبدلنا  $>$  بـ  $\geq$  و  $<$  بـ  $\leq$  نقول فقط، متزايدة، متناقصة، رئيسية، فنتبه!!

(4) نقول عن متتالية عددية  $(u_n)$  إنها **محدودة من الأعلى** بالعدد  $M$  إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < M$ .

(5) نقول عن متتالية عددية  $(u_n)$  إنها **محدودة من الأسفل** بالعدد  $m$  إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > m$ .

**نهاية متتالية عددية :**

• المتتالية  $(u_n)$  تنتهي إلى العدد الحقيقي  $l$ ، يعني أن كل مجال  $]-\varepsilon, l + \varepsilon[$  يشمل كل

حدود المتتالية  $(u_n)$  ابتداء من رتبة معينة  $p$  ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  أو  $\lim u_n = l$

ونقول في هذه الحالة إن المتتالية  $(u_n)$  **متقاربة** (متقاربة نحو  $l$ )

يمكن أن نتخيل هذا بالطريقة الآتية :

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_p, \dots, u_n, \dots$$

$$]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

• المتتالية  $(u_n)$  تنتهي إلى  $+\infty$ ، يعني أن كل مجال  $[A, +\infty[$  يشمل كل حدود المتتالية

$(u_n)$  ابتداء من رتبة معينة  $p$  ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  أو  $\lim u_n = +\infty$

• المتتالية  $(u_n)$  تنتهي إلى  $-\infty$ ، يعني أن كل مجال  $]-\infty, B]$  يشمل كل حدود المتتالية

$(u_n)$  ابتداء من رتبة معينة  $p$  ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  أو  $\lim u_n = -\infty$

في هذه التعاريف،  $A$  و  $B$  و  $\varepsilon$  أعداد حقيقية مع  $\varepsilon > 0$ . وتكون لهذه الأعداد أهمية إذا كان  $A$  كبيراً جداً وكان  $B$  صغيراً جداً (سالب) و  $\varepsilon$  قريب جداً من الصفر.

ملاحظة: نقول إن المتتالية  $(u_n)$  **متباعدة** إذا لم تكن لها نهاية أو إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$

**نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة :**

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  دالة معرفة على المجال

$[A, +\infty[$  مع  $A$  عدد حقيقي وكانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

أي نتعامل مع المتتالية كما نتعامل مع دالة، من حيث استعمال قواعد حساب النهايات

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

مثال :

أمثلة :

• متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 2u_n$$

لنحسب ، مثلاً ، الحدود  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  : حسب العلاقة التراجعية لدينا

$$u_1 = 2u_0 = 2 \times 1 = 2, u_2 = 2u_1 = 2 \times 2 = 4, u_3 = 2u_2 = 2 \times 4 = 8$$

• متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_0 = 0 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$$

لنحسب ، مثلاً ، الحدود  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  و  $u_4$  : حسب العلاقة التراجعية لدينا ،

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

• متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

لنحسب ، مثلاً ، الحدود  $u_2$  و  $u_3$  : حسب العلاقة التراجعية لدينا ،

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1, u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$$

وبهذه الطريقة البسيطة يمكن حساب أي حد من حدود المتتالية العددية  $(u_n)$ .

**مصطلحات :**

(1) نقول عن متتالية عددية  $(u_n)$  إنها **متزايدة تماماً** إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} > u_n$ .

أو من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n > 0$ .

أو من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 0$  و  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

أو من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < 0$  و  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ .

(2) نقول عن متتالية عددية  $(u_n)$  إنها **متناقصة تماماً** إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} < u_n$ .

أو من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n < 0$ .

أو من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 0$  و  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ .

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر :  $(u_n)$  ،  $(v_n)$  ،  $(w_n)$  ثلاث متتاليات عددية إذا كان ابتداء من عدد طبيعي  $n_0$  ،  $v_n < u_n < w_n$  وكانت  $\lim v_n = l$  و  $\lim w_n = l$  حيث  $l$  عدد حقيقي فإن  $\lim u_n = l$ .

فمثلا : لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = n + \cos n$  :  
نعلم أن  $-1 \leq \cos n \leq +1$  وبإضافة  $n$  إلى الأطراف نجد  $n-1 \leq n + \cos n \leq n+1$  وبما أن  $\lim(n-1) = +\infty$  و  $\lim(n+1) = +\infty$  فإن  $\lim u_n = +\infty$ .

**المتتاليات المتجاورتان :** نقول عن متتاليتين عدديتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  إنهما متجاورتان

إذا كانت إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة وكانت  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

**نتيجة :** المتتاليات المتجاورتان متقاربتان ولهما نفس النهاية.

**البرهان بالتراجع**

لتكن  $p(n)$  خاصية تتعلق بعدد طبيعي  $n$  ، (قد تكون مساواة أو متباينة أو ... ، مكتوبة بدلالة  $n$ ) وليكن  $n_0$  عددا طبيعيا معطى.  
إذا كان : (1)  $p(n_0)$  صحيحة.  $p(n)$  صحيحة من أجل  $n = n_0$   
(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq n_0$   
إذا كانت  $p(n)$  صحيحة فإن  $p(n+1)$  صحيحة.  
فإن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $p(n)$  صحيحة.

ملاحظة : البرهان بالتراجع

مثال : لنبرهن بالتراجع أن مجموع الأعداد الطبيعية الفردية يساوي  $n^2$ .

معناه  $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  وهذه هي الخاصية  $p(n)$

(1) من أجل  $n = 1$  ، لدينا  $S_1 = 1$  و  $1^2 = 1$  ومنه الخاصية  $p(1)$  صحيحة.

(2) نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  أي أن  $S_n = n^2$  (فرض التراجع).

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$  أي أن  $S_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا  $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$

ومنه  $S_{n+1} = S_n + (2n+1)$  وباستعمال فرضية التراجع نجد  $S_{n+1} = n^2 + (2n+1)$

وبالتالي  $S_{n+1} = (n+1)^2$ .

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر أو يساوي 1 ،  $p(n)$  صحيحة.

## التمرين 86

- (1) احسب  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  من أجل كل متتالية  $(u_n)$  من المتتاليات الآتية :  
(1)  $u_0 = -3, u_{n+1} = u_n + 2$  ...  
(2)  $u_0 = +4, u_{n+1} = 2u_n$  ...  
(3)  $u_0 = 0, u_{n+1} = u_n + n + 1$  ...  
(4)  $u_0 = +1, u_{n+1} = (n+1)u_n$  ...  
(2) استنتج  $u_n = f(n)$  ثم برهن على صحته بالتراجع.

## الحل

$$u_0 = -3, u_{n+1} = u_n + 2 \quad \dots (1)$$

$$u_0 = -3, u_1 = -3 + 2 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 7, \dots$$

(2) التخمين :  $u_0 = -3, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 7, \dots$  هي متتالية الأعداد الفردية والشكل العام للأعداد الفردية هو  $2k + \alpha$  وبمقارنة هذا الشكل بحدود المتتالية نجد الشكل المناسب هو :  $2k - 3$  وبالتالي :  $u_n = f(n) = 2n - 3$   
لنبرهن ، بالتراجع ، على أن :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 2n - 3$  ، نسمي هذه الخاصية  $p(n)$   
(1) من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 2(0) - 3 = -3$  ومنه الخاصية  $p(0)$  صحيحة.

(2) نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$ .

أي نفرض أن  $u_n = 2n - 3$  (وهو فرض التراجع).

ونبرهن أن  $u_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n - 1$ .

لدينا  $u_{n+1} = u_n + 2$  وباستعمال فرض التراجع نجد  $u_{n+1} = (2n - 3) + 2 = 2n - 1$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $p(n)$  صحيحة.

$$u_0 = 4, u_{n+1} = 2u_n \quad \dots (2)$$

$$u_0 = 4, u_1 = 2u_0 = 8, u_2 = 16, u_3 = 32, u_4 = 64, \dots$$

(2) التخمين : نكتب كل حد على الشكل  $4 \times k$  فنجد :

$$u_0 = 4 \times 1, u_1 = 4 \times 2, u_2 = 4 \times 4, u_3 = 4 \times 8, u_4 = 4 \times 16, \dots$$

لاحظ أن الأعداد : 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16 ، ... هي قوى العدد 2 المختلفة

أي أن شكلها هو :  $2^n$  وبالتالي كل حد يكتب على الشكل  $4 \times 2^n$

ومنه :  $u_n = f(n) = 4 \times 2^n$ .

لنبرهن ، بالتراجع ، على أن :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 4 \times 2^n$  ، نسمي هذه الخاصية  $p(n)$

(1) من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 4 \times 2^0 = 4$  و  $u_0 = 4$  ومنه الخاصية

$p(0)$  صحيحة.

(2) نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$ .

أي نفرض أن  $u_n = 4 \times 2^n$  (وهو فرض التراجع).

ونبرهن أن  $u_{n+1} = 4 \times 2^{n+1}$ .

لدينا  $u_{n+1} = 2u_n$  وباستعمال فرض التراجع نجد  $u_{n+1} = 2(4 \times 2^n) = 4 \times 2^{n+1}$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $p(n)$  صحيحة.

### التمرين 87

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

برهن ، بالتراجع ، على أنه من أجل كل  $n \geq 0$  ،  $u_n \geq -2$ .

### الحل

نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية.

(1) من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 1$  ومنه  $u_0 \geq -2$ . إذن  $p(0)$  صحيحة.

(2) نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن  $u_n \geq -2$  (فرض التراجع)

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$ . أي أن  $u_{n+1} \geq -2$

حسب فرض التراجع لدينا  $u_n \geq -2$  ، وبضرب الطرفين في العدد  $\frac{1}{2}$  نجد :  $\frac{1}{2}u_n \geq -1$

وبإضافة العدد  $(-1)$  إلى الطرفين نجد  $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -2$  ومنه  $u_{n+1} \geq -2$ .

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $p(n)$  صحيحة.

### التمرين 88

برهن ، بالتراجع ، الخواص الآتية :

(1) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $2^n > n$ .

(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ، يقبل العدد  $(3^{2n} - 2^n)$  القسمة على 7.

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

### الحل

(1) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية.

• من أجل  $n = 1$  ، لدينا  $2^1 = 2$  ومنه  $2^1 > 1$ . إذن  $p(1)$  صحيحة.

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن  $2^n > n$  (فرض التراجع)

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$ . أي أن  $2^{n+1} > n+1$

حسب فرض التراجع لدينا  $2^n > n$  ؛ وبضرب الطرفين في العدد 2 نجد :  $2^{n+1} > 2n$

وبما أن  $2^{n+1} > n+n \geq n+1$  فإن  $2^{n+1} > n+1$ . إذن  $2^{n+1} > n+1$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $p(n)$  صحيحة.

(2) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية.

• من أجل  $n = 1$  ، لدينا  $3^{2 \times 1} - 2^1 = 7$  و يقبل القسمة على 7. إذن  $p(1)$  صحيحة.

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن العدد  $(3^{2n} - 2^n)$  يقبل القسمة

على 7 (فرض التراجع).

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$ . أي أن العدد  $(3^{2n+2} - 2^{n+1})$  يقبل

القسمة على 7.

لدينا  $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n$

$$= (7+2) \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7 \times 3^{2n} + 2(3^{2n} + 3^{2n})$$

بما أن العدد  $(3^{2n} + 3^{2n})$  يقبل القسمة على 7 (حسب الفرض) والعدد  $7 \times 3^{2n}$  يقبل القسمة

على 7 (لأنه جداء عوامل أحدها يقبل القسمة على 7) فإن مجموعهما يقبل القسمة على 7.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $p(n)$  صحيحة.

(3) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية.

• من أجل  $n = 1$  ، لدينا  $1^3 = 1$  و  $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$  و  $1^3 = 1$  و  $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ . إذن  $p(1)$  صحيحة.

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\text{فرض التراجع})$$

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$ . أي أن :

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

ليكن الطرف الأول من هذه المساواة  $1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3$  ، بإظهار الحد  $n^2$  يصبح شكل الطرف الأول كما يلي :  $1^3 + 2^3 + \dots + n^2 + (n+1)^3$  .

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2 (n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

وهذا هو الطرف الثاني من المساواة المراد إثباتها.  
الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $p(n)$  صحيحة.

## التمرين 89

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}u_n}$  .  
برهن ، بالتراجع ، على أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

## الحل

نبرهن ، بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \leq 2$  .

(1) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية .

• من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 2$  ومنه  $u_0 \leq 2$  . إذن  $p(0)$  صحيحة .

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن  $u_n \leq 2$  (فرض التراجع)

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$  . أي أن  $u_{n+1} \leq 2$

حسب فرض التراجع لدينا  $u_n \leq 2$  ، وبضرب الطرفين في العدد  $\frac{1}{2}$  نجد :  $\frac{1}{2}u_n \leq 1$

وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد :  $\frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$  .

وبما أن الطرفين موجبان فإن  $\frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$  تكافئ  $\sqrt{\frac{1}{2}u_n + 1} \leq \sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}u_n + 1} \leq 2 \text{ فإن } \sqrt{2} \leq 2 \text{ وبما أن}$$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $p(n)$  صحيحة.

## التمرين 90

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 3$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$  .

(1) ادرس ، على المجال  $[2, +\infty[$  ، تغيرات الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

(2) برهن ، بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2 \leq u_n \leq 4$  .

## الحل

$$(1) \text{ من أجل كل } x \text{ من } [2, +\infty[ , f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)$$

إذن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $(x^2 - 4)$  . ومنه من أجل كل  $x$  من  $[2, +\infty[$  ،  $f'(x) \geq 0$  ، وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[2, +\infty[$  .

(2) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية .

• من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = 3$  ومنه  $2 \leq u_0 \leq 4$  . إذن  $p(0)$  صحيحة .

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن  $2 \leq u_n \leq 4$  (فرض التراجع)

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$  . أي أن  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

حسب فرض التراجع لدينا  $2 \leq u_n \leq 4$  ، بقلب أطراف المتباينة نجد :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \text{ وجمع هذه المتباينة مع المتباينة } 2 \leq u_n \text{ نجد :}$$

$$\frac{1}{2} + 4 \leq u_n + \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} + 4 \text{ ومنه } \frac{1}{4} + 4 \leq u_n + \frac{1}{u_n} \leq \frac{9}{2} \text{ وبضرب الأطراف في } \frac{1}{2} \text{ نجد :}$$

$$2 \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \leq 4 \text{ فإن } 2 \leq \frac{17}{8} \text{ و } \frac{9}{4} \leq 4 \text{ وبما أن } \frac{17}{8} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{9}{4}$$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $p(n)$  صحيحة.

التمرين 91

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{7u_n + 6}{u_n + 2}$ .

(1) برهن ، بالتراجع ، أنه من أجل كل  $n > 0$  ،  $u_n > 0$ .

(2) بين أنه من أجل كل  $n > 0$  ،  $|u_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2}|u_n - 6|$ .

(3) استنتج ، باستعمال البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل  $n > 0$  :

$$|u_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$$

(4) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 6.

الحل

(1) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية.

• من أجل  $n = 1$  ، لدينا  $u_1 = \frac{7u_0 + 6}{u_0 + 2} = \frac{13}{3}$  ومنه  $u_1 > 0$  . إذن  $p(1)$  صحيحة.

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن  $u_n > 0$  (فرض التراجع)

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$  . أي أن  $u_{n+1} > 0$

بما أن  $u_n > 0$  (فرض التراجع) فإن  $\frac{7u_n + 6}{u_n + 2} > 0$  ومنه  $u_{n+1} > 0$ .

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $p(n)$  صحيحة.

$$(2) \text{ من أجل كل } n > 0, |u_{n+1} - 6| = \left| \frac{7u_n + 6}{u_n + 2} - 6 \right| = \left| \frac{u_n - 6}{u_n + 2} \right|$$

وبما أنه من أجل كل  $n > 0$  ،  $u_n > 0$  ، فإن  $\frac{u_n - 6}{u_n + 2} < \frac{u_n - 6}{2}$

$$\text{ومنهم } |u_{n+1} - 6| < \frac{1}{2}|u_n - 6| \text{ وبالتالي } |u_{n+1} - 6| < \frac{1}{2}|u_n - 6|$$

(3) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية.

• من أجل  $n = 1$  ، لدينا  $|u_1 - 6| = \left|\frac{13}{3} - 6\right| = \frac{5}{3} \leq \frac{1}{2}|u_0 - 6|$  وبالتالي  $\frac{5}{3} \leq \frac{5}{2}$

إذن  $p(1)$  صحيحة.

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  ، أي أن :

$$|u_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6| \quad (\text{فرض التراجع})$$

ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$  ، أي أن :

$$|u_{n+1} - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 6|$$

لدينا من أجل كل  $n > 0$  ،  $|u_{n+1} - 6| < \frac{1}{2}|u_n - 6|$  (من السؤال السابق)

وحسب فرض التراجع لدينا  $|u_{n+1} - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$

$$\text{ومنهم } |u_{n+1} - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 6|$$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $p(n)$  صحيحة.

(4) استنتج تقارب المتتالية  $(u_n)$  نحو 6.

لدينا  $|u_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$  ، إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 6| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6|$

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 6| = 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 6| = 0$$

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 6.

التمرين 92

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 5$  و  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$

(1) برهن ، بالتراجع ، أنه من أجل كل  $n$  ،  $u_n > 0$ .

(2) بين أنه من أجل كل  $n$  ،  $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|u_n - 4|$

(3) استنتج ، باستعمال البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل  $n$  :

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(4) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

الحل

(1) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية .

- من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 5$  ومنه  $u_0 > 0$  . إذن  $p(0)$  صحيحة .
- نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  , أي أن  $u_n > 0$  (فرض التراجع) ونبرهن أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n+1$  . أي أن  $u_{n+1} > 0$  بما أن  $u_n > 0$  (فرض التراجع) فإن  $\sqrt{u_n + 12} > 0$  ومنه  $u_{n+1} > 0$  .
- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ,  $p(n)$  صحيحة .

$$(2) \text{ من أجل كل } n, |u_{n+1} - 4| = |\sqrt{u_n + 12} - 4| = \left| \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \right| \leq \left| \frac{u_n - 4}{4} \right|$$

(بضرب البسط والمقام في مرافق  $\sqrt{u_n + 12} - 4$ )

$$\text{وبالتالي : } |u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4} |u_n - 4|$$

(3) نرمز بالرمز  $p(n)$  لهذه الخاصية .

$$\bullet \text{ من أجل } n = 0 \text{ لدينا } |u_0 - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 \text{ ومنه } |5 - 4| \leq 1 \text{ وبالتالي } 1 \leq 1$$

إذن  $p(0)$  صحيحة .

• نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$  , أي أن :

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ (فرض التراجع) , ونبرهن أن } p(n) \text{ صحيحة من أجل الرتبة } n+1$$

$$n+1, \text{ أي أن : } |u_{n+1} - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{لدينا من أجل كل } n, |u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4} |u_n - 4| \text{ (من السؤال السابق)}$$

$$\text{وحسب فرض التراجع لدينا } |u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ ومنه } |u_{n+1} - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ,  $p(n)$  صحيحة .

(4) استنتاج تقارب المتتالية  $(u_n)$  .

$$\text{لدينا } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 4| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ إذن , } 0 \leq |u_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 4| = 0$$

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 4 .

التمرين 93

احسب , من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ,  $u_{n+1} - u_n$  وأعط اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  في الحالات الآتية :

$$(1) \quad u_n = 3 - \frac{1}{2}n \quad (2) \quad u_n = n^2 - n \quad (2) \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

الحل

(1) حساب  $u_{n+1} - u_n$

$$\text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{2}(n+1) - \left[3 - \frac{1}{2}n\right] = -\frac{1}{2}$$

اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما لأن : من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

(2) حساب  $u_{n+1} - u_n$  .

$$\text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = 2n$$

اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة لأن : من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

(3) حساب  $u_{n+1} - u_n$  .

$$\text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1}$$

اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما لأن : من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

وإذا كان  $n \geq 5$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي: المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً.

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$  (4)

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)}}{2^{3(n+1)}} = \frac{3^{2n+2}}{2^{3n+3}}$

(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :

(3) بما أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً.

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n}$  (5)

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 2}{2n + 2}$

(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :

(3) من أجل  $n \geq 1$  لدينا  $n^2 + n - 1 > 0$  وبما أن  $2n(n+1) > 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً.

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_0 = 2$  (6)

$u_{n+1} = u_n + 2n$

من العلاقة التراجعية:  $u_{n+1} = u_n + 2n$  نستنتج: وبالتالي:  $u_{n+1} - u_n > 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً.

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n}$  (7)

بما أن  $2n$  زوجي فإن  $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2} = \frac{4}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

## التمرين 94

ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  في كل حالة من الحالات الآتية:

(1)  $u_n = -2n + 3$  (2)  $u_n = \frac{2-4n}{n+2}$  (3)  $u_n = (n-5)^2$

(4)  $u_n = \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$  (5)  $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n}$  (6)  $u_0 = 2$   
 $u_{n+1} = u_n + 2n$

(7)  $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n}$  (8)  $u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

## الحل

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = -2n + 3$  (1)

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = -2(n+1) + 3 = -2n + 1$

(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :  $u_{n+1} - u_n = -2n + 1 - (-2n + 3) = -2$

(3) بما أن  $u_{n+1} - u_n < 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً.

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = \frac{2-4n}{n+2}$  (2)

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = \frac{2-4(n+1)}{(n+1)+2} = \frac{-4n-2}{n+3}$

(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-4n-2}{n+3} - \frac{2-4n}{n+2} = \frac{-10}{(n+3)(n+2)}$

(3) بما أن  $u_{n+1} - u_n < 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً.

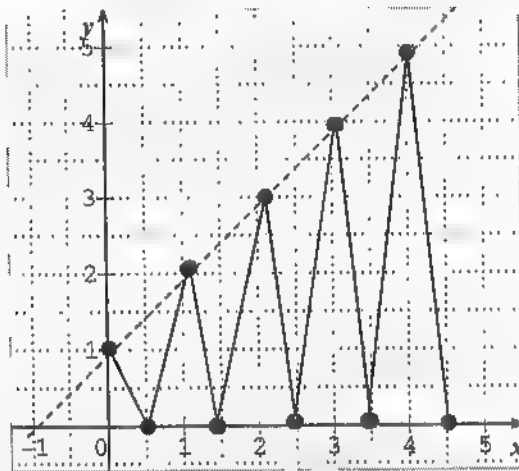
دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = (n-5)^2$  (3)

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = (n+1-5)^2 = (n-4)^2$

(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :

$u_{n+1} - u_n = (n-4)^2 - (n-5)^2 = (n-4-n+5)(n-4+n-5) = 2n-9$

(3) إذا كان  $n \leq 5$  فإن  $u_{n+1} - u_n < 0$  وبالتالي: المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً.



(1) رتبة الدالة  $f$ : الدالة ليست رتيبة لأن المنحنى الممثل لها يلاحظ عليه النزول (متناقصة) ثم الصعود (متزايدة) وهكذا...

(2) التعبير عن الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$

التخمين: بما أن  $f(0)=1$  فإن  $u_0=1$  و بما أن  $f(1)=2$  فإن  $u_1=2$  وهكذا...

وبالتالي:  $u_n = n+1$

لنبرهن، بالتراجع، على أن:

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_n = n+1$ , نسمي هذه الخاصية  $p(n)$

(1) من أجل  $n=0$ , لدينا  $u_0 = 0+1=1$  و  $u_0=1$  ومنه الخاصية  $p(0)$  صحيحة.

(2) نفرض أن  $p(n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $n$ .

أي نفرض أن  $u_n = n+1$  (وهو فرض التراجع). ونبرهن أن  $u_{n+1} = n+2$ .

لدينا  $u_{n+1} = u_n + 1$  وباستعمال فرض التراجع نجد  $u_{n+1} = (n+1) + 1 = n+2$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $p(n)$  صحيحة.

(3) المتتالية  $(u_n)$  متزايدة

نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :  $u_{n+1} - u_n = (n+2) - (n+1) = 1$

(3) بما أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \left(\frac{4}{9} - 1\right) = -\frac{5}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

(3) بما أن  $u_{n+1} - u_n < 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$ :  $u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$  ... (8)

(1) نحسب  $u_{n+1}$ :  $u_{n+1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

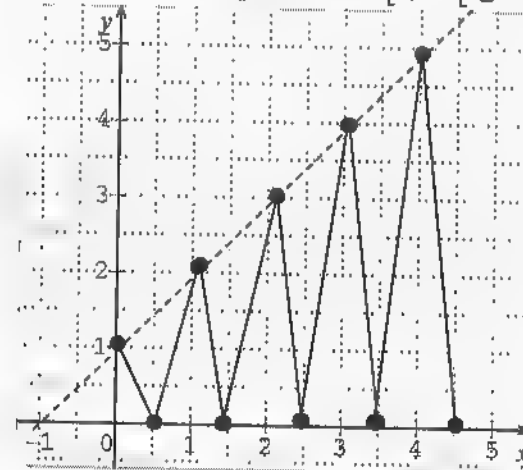
(2) نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$ :

$$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3) بما أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

### التمرين 95

تكن الدالة  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بتمثيلها البياني التالي:



(1) هل الدالة  $f$  رتيبة؟

(2) نسمي  $(u_n)$  المتتالية المعرفة بـ:  $u_n = f(n)$ . عبر عن الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.



التمرين 96

( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كالآتي :  $u_n = \frac{3^n}{n+2}$ .

(1) احسب الحدود الخمسة الأولى .  
(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون :  $u_n > 0$ .

(3) ادرس إشارة  $u_{n+1} - 1$ .

(4) استنتج اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ).

الحل

( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كالآتي :  $u_n = \frac{3^n}{n+2}$ .

$$u_0 = \frac{3^0}{0+2} = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{3^1}{1+2} = 1$$

(1) حساب الحدود الخمسة الأولى :

$$u_2 = \frac{3^2}{2+2} = \frac{9}{4}, u_3 = \frac{3^3}{3+2} = \frac{27}{5}, u_4 = \frac{3^4}{4+2} = \frac{81}{6}$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون :  $u_n > 0$

بما أن من كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3^n > 0$  و  $n+1 > 0$  فإن  $\frac{3^n}{n+2} > 0$  وبالتالي  $u_n > 0$

ملاحظة: يمكن تسمية هذه الخاصية  $p(n)$  وإثبات صحتها بالتراجع.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+3}}{\frac{3^n}{n+2}} - 1 = \frac{3^{n+1}}{n+3} \times \frac{n+2}{3^n} - 1$$

$$= \frac{3(n+2)}{n+3} - 1 = \frac{2n+3}{n+3} > 0$$

ومنه  $u_{n+1} - 1 > 0$  وبالتالي :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

(3) دراسة إشارة  $u_{n+1} - 1$

(4) استنتج اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ )

بما أن  $u_n > 0$  و  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  فإن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة تماما.

التمرين 97

( $u_n$ ) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  بالعلاقة :  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(1) احسب  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $u_4$ .

(2) عبر عن  $u_{n+1}$  بدلالة  $n$ .

(3) برهن أن  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$  ثم استنتج اتجاه تغير ( $u_n$ )

الحل

( $u_n$ ) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  بالعلاقة :  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, u_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$u_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

(2) التعبير عن  $u_{n+1}$  بدلالة  $n$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{n}{n+2}$$

(3) برهان أن  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$

استنتج اتجاه تغير ( $u_n$ ) لدينا  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}$

بما أن  $u_n > 0$  (لأن  $\frac{1}{n(n+1)} > 0$ ) و  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  (لأن  $\frac{n}{n+2} < 1$ ) فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

التمرين 98

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها العام  $u_n$  حيث  $u_n = \frac{n-2}{n+3}$ .

- احسب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ .
- برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

الحل

(1) حساب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ :  $u_3 = \frac{1}{6}, u_2 = 0, u_1 = -\frac{1}{4}, u_0 = -\frac{2}{3}$

(2) المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما: لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{n-1}{n+4} - \frac{n-2}{n+3} = \frac{+5}{(n+4)(n+3)}$

إذن  $u_{n+1} - u_n > 0$  لأن  $\frac{+5}{(n+4)(n+3)} > 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

التمرين 99

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها العام  $u_n$  حيث  $u_n = \frac{4-n}{n+3}$ .

- احسب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ .
- برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

الحل

(1) حساب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ :  $u_3 = \frac{1}{6}, u_2 = \frac{2}{7}, u_1 = \frac{3}{4}, u_0 = \frac{4}{3}$

(2) المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما: لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{3-n}{n+4} - \frac{4-n}{n+3} = \frac{-7}{(n+4)(n+3)}$

إذن  $u_{n+1} - u_n < 0$  لأن  $\frac{-7}{(n+4)(n+3)} < 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

التمرين 100

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها العام  $u_n$  حيث  $u_n = \sqrt{2n+1}$ .

- احسب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ .
- برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

الحل

(1) حساب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ :  $u_3 = \sqrt{7}, u_2 = \sqrt{5}, u_1 = \sqrt{3}, u_0 = +1$

(2) المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما: لدينا  $u_{n+1} = \sqrt{2n+3}$

نعلم أن  $2n+3 > 2n+1$  وبما أن الطرفين موجبان فإن  $\sqrt{2n+3} > \sqrt{2n+1}$  وبالتالي  $u_{n+1} > u_n$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

التمرين 101

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها العام  $u_n$  حيث  $u_n = \sqrt{16-2n}$ .

- عين مجموعة تعريف  $(u_n)$ .
- احسب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ .
- برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

الحل

(1) مجموعة تعريف  $(u_n)$ : تكون  $(u_n)$  معرفة إذا كان  $16-2n \geq 0$ , أي  $n \leq 8$

ومنه مجموعة التعريف هي:  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

(2) حساب  $u_3, u_2, u_1, u_0$ :  $u_3 = \sqrt{10}, u_2 = \sqrt{12}, u_1 = \sqrt{14}, u_0 = +4$

(2) المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما: يمكن حساب بقية الحدود, وهي ليست كثيرة, لاكتشاف

أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

التمرين 102

جد نهاية المتتالية  $(u_n)$  في كل حالة من الحالات الآتية :

$$u_n = (1 - \sqrt{n}) \left( 2 + \frac{3}{n} \right) \dots (3) , u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - 3 \dots (2) , u_n = \frac{1}{n} - 3n^2 \dots (1)$$

$$u_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2} \dots (6) , u_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \dots (5) , u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \dots (4)$$

$$u_n = \frac{n+1}{3n+1} \dots (10) , u_n = \frac{1}{3^n} \dots (9) , u_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n \dots (8) , u_n = (0.9)^n \dots (7)$$

الحل

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - 3n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2) = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - 3 \right) = -3 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{n}) \left( 2 + \frac{3}{n} \right) = (-\infty)(2) = -\infty \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2} = 0 \quad \text{ومنه} \quad u_n = \frac{-1}{n^2} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{ومنه} \quad u_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{الخلاصة :}$$

$$(6) \text{ لدينا } -1 \leq \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \leq +1 \text{ وبقسمة الطرفين على } 3n^2 \text{ نجد}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3n^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2} < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{+1}{3n^2} \quad \text{ومنه} \quad \frac{-1}{3n^2} \leq \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2} < \frac{+1}{3n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2} : \text{ وبالخلاصة هي : } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{3n^2} \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0.9)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9^n}{10^n} = 0 \quad (7)$$

لاحظ أننا طبقنا التزايد المقارن لقوى عدد .

المتتالية الحسابية

أمثلة : اكتب : متتالية الأعداد الطبيعية الأكبر من 7 . متتالية الأعداد الطبيعية الزوجية .  
الأعداد الطبيعية الفردية . الأعداد الطبيعية المضاعفة للعدد 5 .

الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 9 .  
نلاحظ أن كل حد من حدود هذه المتتاليات - عدا الحد الأول - هو مجموع الحد الذي قبله ونفس العدد الحقيقي . ومنه :

(1) نسمي متتالية حسابية أساسها كل متتالية عددية  $(u_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

نتيجة : تتعين متتالية حسابية إذا علم حدها الأول  $(u_0 \text{ أو } u_1 \text{ على سبيل المثال})$  وعلم أساسها .

فحدود المتتالية الحسابية المعرفة على  $\mathbb{N}$  التي حدها الأول  $u_0 = -1$  وأساسها  $r = \frac{1}{2}$  هي :

$$u_0 = -1, u_1 = u_0 + r = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, u_2 = u_1 + r = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, \dots$$

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} : \text{ ينتج } u_n = u_{n-1} + r \text{ و } u_{n+1} = u_n + r$$

ويسمى  $u_n$  الوسط الحسابي للعدد  $u_{n-1}$  و  $u_{n+1}$  ، وهما حدان يحصران  $u_n$  .

وبالتالي نقول عن أعداد حقيقية :  $a, b, c$  ، بهذا الترتيب ، " أنها حدود متتابعة من متتالية حسابية " إذا وفقط إذا تحققت العلاقة :  $2b = a + c$  .

(2) الحد العام لمتتالية حسابية : لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية ، حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  .

إن حساب حد رتبته كبيرة بالطريقة التراجعية السابقة يطول ويطول لهذا نستعين بعبارة الحد العام وهذه صيغتها :

$$\textcircled{1} \text{ الحد الأول للمتتالية الحسابية هو } u_0 , u_n = u_0 + nr$$

$$\textcircled{2} \text{ الحد الأول للمتتالية الحسابية هو } u_1 , u_n = u_1 + (n-1)r$$

(5) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية: ليكن  $S$  هذا المجموع

عدد الحدود المتتابعة

الحد الأول

الحد الأخير

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$$

نستعمل المثال السابق لحساب المجموعين:

$$S = u_{10} + u_{11} + \dots + u_{40} = \frac{40-10+1}{2} (u_{10} + u_{40}) = \frac{31}{2} (4 + 19) = \frac{713}{2}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n-1+1}{2} (u_1 + u_n) = \frac{n}{2} \left( -1 + -1 + \frac{n}{2} \right) = \frac{n(n-4)}{4}$$

المتتالية الهندسية:

(1) نسمى متتالية هندسية أساسها  $q$  كل متتالية عددية  $(u_n)$  معرفة على  $N$  كما يلي:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

نتيجة: نتعين متتالية هندسية إذا علم حدها الأول  $(u_0)$  أو  $u_1$  على سبيل المثال) وعلم أساسها  $q$ .

فحدود المتتالية الهندسية المعرفة على  $N$  التي حدها الأول  $u_0 = -2$  وأساسها  $q = \frac{1}{2}$  هي:

$$u_0 = -2, u_1 = u_0 \times q = -2 \times \frac{1}{2} = -1, u_2 = u_1 \times q = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \dots$$

نتيجة: من  $u_{n+1} = u_n \times q$  و  $u_n = u_{n-1} \times q$  ينتج:  $(u_n)^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$

ويسمى  $u_n$  الوسط الهندسي للعددين  $u_{n-1}$  و  $u_{n+1}$ ، وهما حدان يحصران  $u_n$ . وبالتالي نقول عن أعداد حقيقية  $a, b, c$ ، بهذا الترتيب، "أنها حدود متتابعة من متتالية هندسية" إذا وفقط إذا تحققت العلاقة:  $b^2 = a \times c$ .

(2) الحد العام لمتتالية هندسية: إن حساب حد رتبته كبيرة بهذه الطريقة التراجعية السابقة يطول ويطول لهذا نستعين بعبارة الحد العام وهما هي:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

في الحالة التي يكون فيها الحد الأول للمتتالية الحسابية هو  $u_0$ .

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

في الحالة التي يكون فيها الحد الأول للمتتالية الحسابية هو  $u_1$ .

$$u_n = u_p + (n-p)r, \quad u_p \text{ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية}$$

فعبارة الحد العام حسب معطيات المثال السابق هي:  $u_n = -1 + \frac{1}{2}n$  وبالتالي يمكن

حساب أي حد من حدودها مهما كانت رتبته، لنحسب، مثلا، الحدين  $u_{100}$  و  $u_{20}$ :

$$u_{20} = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)(20) = +9, \quad u_{100} = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)(100) = +49$$

لاحظ سرعة إيجاد الحدود باستعمال الحد العام بينما لو نستعمل التراجع لحساب  $u_{100}$ ، مثلا،

يجب أن نحسب  $u_1$  ثم نحسب  $u_2$  ثم نحسب  $u_3$  ثم... ثم نحسب  $u_{99}$  ثم نحسب  $u_{100}$ .

وفي كل مرة نطبق العلاقة  $u_{n+1} = u_n + r$  فلا تستغن عن الحد العام لحساب أي حد.

(3) اتجاه تغير متتالية حسابية: لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية، حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ .

إن عبارة الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  هي  $u_n = u_0 + nr$  ومنه  $u_{n+1} - u_n = r$

الخلاصة: اتجاه تغير المتتالية الحسابية يتعلق بإشارة الأساس  $r$ .

فإذا كان  $r > 0$  تكون المتتالية الحسابية متزايدة تماما.

وإذا كان  $r < 0$  تكون المتتالية الحسابية متناقصة تماما.

وإذا كان  $r = 0$  تكون المتتالية الحسابية رتيبة.

ففي المثال السابق: بما أن  $r = \frac{1}{2} > 0$  فإن المتتالية الحسابية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

(4) مجموع  $n$  حدا الأولى من متتالية حسابية:

ليكن  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولى من متتالية حسابية  $(u_n)$  حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ .

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = \frac{n}{2} (u_0 + u_{n-1})$$

المثال السابق: لنحسب مجموع 20 حدا الأولى

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = \frac{20}{2} (u_0 + u_{19})$$

لنحسب  $u_{19}$  باستعمال عبارة الحد العام  $u_n = -1 + \frac{1}{2}n$ :  $u_{19} = -1 + \frac{19}{2} = \frac{17}{2}$

$$S_n = \frac{20}{2} \left( -1 + \frac{17}{2} \right) = 75 \quad \text{فجدد: } S_n \text{ في } u_0 \text{ و } u_{19}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = (-2) \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] = -4 \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1 \right]$$

② إذا كان  $q = 1$  فإن  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = nu_0$

(5) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية: ليكن  $S$  هذا المجموع

الحد الأول

عدد الحدود المتتالية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p \left( \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$$

لتكن المتتالية الهندسية  $(u_n)$  التي حدها الأول  $u_0 = -2$  وأساسها  $q = \frac{1}{2}$  لحساب المجموعين :

$$\textcircled{1} S = u_{10} + u_{11} + \dots + u_{40} = u_{10} \left( \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{40-10+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) = u_{10} \left( \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{31} - 1}{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$S = -2 \left( \frac{1}{2} \right)^{10} \left( \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{31} - 1}{-\frac{1}{2}} \right) = 4 \left( \frac{1}{2} \right)^{41}$$

وبما أن  $u_{10} = -2 \left( \frac{1}{2} \right)^{10}$  فإن

$$\textcircled{2} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

نهاية متتالية هندسية: لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

إن حدها العام هو  $u_n = u_0 \times q^n$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n$

والعلاقة بين أي حدين دليلاهما  $p$  و  $n$  هي :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

فعبارة الحد العام للمتتالية الهندسية  $(u_n)$  التي حدها الأول  $u_0 = -2$  وأساسها  $q = \frac{1}{2}$  هي :

$$u_n = -2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

وبالتالي يمكن حساب أي حد من حدودها مهما كانت رتبته .

لنحسب ، مثلا ، الحدين  $u_{100}$  و  $u_{20}$  :

$$u_{20} = -2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^{20} , \quad u_{100} = -2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^{100}$$

لاحظ سرعة إيجاد الحدود باستعمال الحد العام بينما لو نستعمل التراجع لحساب  $u_{100}$  ، مثلا ،

يجب أن نحسب  $u_1$  ثم نحسب  $u_2$  ثم نحسب  $u_3$  ثم ... ثم نحسب  $u_{99}$  ثم نحسب  $u_{100}$  .

وفي كل مرة نطبق العلاقة  $u_{n+1} = u_n \times q$  فلا تستغن عن الحد العام لحساب أي حد .

(3) اتجاه تغير متتالية هندسية: لدينا  $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1)$

نلاحظ أن إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$  تتعلق بالحد  $u_0$  وبالأساس  $q$  .

لندرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية  $(u_n)$  التي حدها الأول  $u_0 = -2$  وأساسها  $q = \frac{1}{2}$

لدينا  $u_{n+1} - u_n = (-2) \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \left( \frac{1}{2} \right)^n$  المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

(4) مجموع  $n$  حدا الأولى من متتالية هندسية:

ليكن  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولى من متتالية هندسية  $(u_n)$  حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$  .

① إذا كان  $q \neq 1$  فإن

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

لنحسب مجموع 20 حدا الأولى للمتتالية الهندسية  $(u_n)$  التي حدها الأول  $u_0 = -2$

وأساسها  $q = \frac{1}{2}$

ولدينا  $S_1 = \frac{25}{2}(-3+9) = 75$  إذن  $u_{24} = u_0 + 24r = -3 + (24)\left(\frac{1}{2}\right) = 9$

حساب  $S_2$

لاحظ أن عدد الحدود هو 76 والحد الأول في  $S_2$  هو  $u_{25}$  والحد الأخير في  $S_2$  هو  $u_{100}$ .

ولدينا:  $u_{25} = u_0 + 25r = -3 + (25)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{2}$

و  $u_{100} = u_0 + 100r = -3 + (100)\left(\frac{1}{2}\right) = 47$

إذن  $S_2 = \frac{76}{2}\left(\frac{19}{2} + 47\right) = 2147$

(2) تعيين  $n$  إن  $u_n > 50$  تكافئ  $-3 + (n)\left(\frac{1}{2}\right) > 50$

وتكافئ  $\frac{1}{2}n - 3 > 50$  ومنه  $n > 106$

التمرين 104

احسب المجموعين الآتيين

$S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 121$  و  $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \dots - 34$

الحل

• لاحظ أن  $S_1$  هو مجموع أعداد فردية تبدأ بالعدد 5 وتنتهي بالعدد 121.

ونعلم أن الأعداد الفردية تشكل متتالية حسابية  $(u_n)$  حدها الأول  $u_0 = 1$  وأساسها

$r = 2$ , أي أن حدها العام هو  $u_n = 2n + 1$ .

إذن  $u_2 = 5$  و  $u_{60} = 121$  وبالتالي  $S_1 = u_2 + u_3 + \dots + u_{60}$

لدينا عدد الحدود هو  $59 = 60 - 2 + 1$  ( دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1 )

و بتطبيق قانون المجموع نجد:  $S_1 = \frac{59}{2}(u_2 + u_{60}) = \frac{59}{2}(5 + 121) = 3717$

طريقة ثانية:

لاحظ أن  $(7) - (5) = (9) - (7) = (11) - (9) = \dots = 2$

إذن  $S_1$  هو مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 5$  وأساسها  $r = 2$

ومن حدها العام هو  $u_n = 2n + 5$ .

إذن  $u_{58} = 121$  وبالتالي  $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{58}$

ومنه الملخص الآتي:

$q$	$q \leq -1$	$-1 < q < +1$	$q = +1$	$q > +1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	غير موجودة	0	$u_0$	$+\infty$ ( $u_0 > 0$ ) $-\infty$ ( $u_0 < 0$ )
	متباعدة	متقاربة	متقاربة	متباعدة

جدول ملخص للمتتاليتين الحسابية والهندسية

العناصر	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	$u_{n+1} = u_n + r$ حيث $r$ هو الأساس	$u_{n+1} = u_n \times q$ حيث $q$ هو الأساس
اتجاه التغير	$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} - u_n = u_n(q - 1)$
التعيين	تتبعين بالحد الأول والأساس	تتبعين بالحد الأول والأساس
ثلاثة حدود متتالية	$2b = a + c$ حيث $b$ هو الوسط الحسابي	$b^2 = a \times c$ حيث $b$ هو الوسط الهندسي
الحد العام	$u_n = u_0 + n \times r$ أو $u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_0 \times q^n$ أو $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
العلاقة بين حدين	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
مجموع حدود متعاقبة	$S = u_p + \dots + u_n$ $S = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$	$S = u_p + \dots + u_n$ $S = u_p \left( \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$

التمرين 103

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = -3$  وأساسها  $r = \frac{1}{2}$ .

(1) احسب المجموعين  $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{24}$  و  $S_2 = u_{25} + u_{26} + \dots + u_{100}$

(2) ابتداءً من أي رتبة  $n$  يكون لدينا  $u_n > 5$  ؟

الحل

(1) حساب  $S_1$

لاحظ أن عدد الحدود هو 25 والحد الأول في  $S_1$  هو -3 والحد الأخير في  $S_1$  هو  $u_{24}$ .

إذن  $n = 30$  , لأن  $n$  عدد طبيعي .

التمرين 106

$(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$  .

(1) احسب  $u_1, u_2, u_3$  .

(2) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي :  $v_n = \frac{1}{u_n}$  .

برهن أن  $(v_n)$  متتالية حسابية , يطلب تعيين أساسها .

(3) استنتج عبارة  $v_n$  ثم عبارة  $u_n$  .

الحل

(1) حساب  $u_1, u_2, u_3$  من العلاقة  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$  نجد :

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(2) متتالية حسابية  $(v_n)$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 1, \text{ لدينا , من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول  $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$  .

(3) عبارتا  $u_n$  و  $v_n$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ,  $v_n = n + 1$  .

وبما أن  $v_n = \frac{1}{u_n}$  فإن  $u_n = \frac{1}{v_n}$  ومنه  $u_n = \frac{1}{n+1}$  .

التمرين 107

يعاني مصنع من نقص سنوي في إنتاجه قدره 40% . بلغ إنتاج هذا المصنع 25000 وحدة سنة 2000 .

لدينا عدد الحدود هو 59 , وبطبيق قانون المجموع نجد :

$$S_1 = \frac{59}{2}(u_0 + u_{58}) = \frac{59}{2}(5 + 121) = 3717$$

• لاحظ أن  $(2) - (5) = (-1) - (-2) = (-4) - (-1) = (-7) - (-4) = \dots = -3$

إذن ,  $S_2$  هو مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 5$  وأساسها  $r = -3$

ومنه حدها العام هو  $u_n = -3n + 5$  .

إذن  $u_{13} = -34$  وبالتالي  $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{13}$

لدينا عدد الحدود هو 14 , وبطبيق قانون المجموع نجد :

$$S_1 = \frac{14}{2}(u_0 + u_{13}) = \frac{14}{2}(5 - 34) = -203$$

التمرين 105

$(u_n)$  متتالية حسابية , بحيث أن :  $u_{20} = 12$  و  $u_{25} = 16$  .

(1) عين حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  .

(2) اكتب , بدلالة  $n$  , المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

(3) استنتج قيمة  $n$  من أجل  $S_n = 248$  .

الحل

(1) تعيين  $u_0$  و  $r$  إن عبارة الحد العام هي  $u_n = u_0 + n \times r$  .

$$\begin{cases} u_0 + 20r = 12 \dots (1) \\ u_0 + 25r = 16 \dots (2) \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} u_{20} = u_0 + 20r \\ u_{25} = u_0 + 25r \end{cases} \text{ إذن}$$

$$5r = 4 \text{ ومنه } r = \frac{4}{5} \text{ وبتعويض قيمة } r \text{ في (1) نجد : } u_0 = -4 \text{ ومنه } u_n = \frac{4}{5}n - 4$$

(2) حساب  $S_n$  بدلالة  $n$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}\left(-4 + \frac{4}{5}n - 4\right) = \frac{(n+1)(2n-20)}{5}$$

$$\frac{(n+1)(2n-20)}{5} = 248 \text{ تكافئ } S_n = 248 \text{ إذن } (n+1)(2n-20) = 1240$$

$$n^2 - 9n - 630 = 0 \text{ تكافئ}$$

ومميز هذه المعادلة هو 2601 ومنه للمعادلة حلان مختلفان هما  $n_1 = -21$  ,  $n_2 = 30$

(1) ما هو الإنتاج المتوقع في السنتين 2001 و 2002. (عدد الوحدات)

(2) لنرمز بالرمز  $p_n$  إلى إنتاج المصنع سنة 2000 أي أن  $p_0 = 25000$  وبالرمز  $p_n$  إلى إنتاجه سنة  $(2000 + n)$ . عبر عن  $p_n$  بدلالة  $n$ .

الحل

(1) إنتاج السنتين 2001 و 2002

لدينا الـ 40% من إنتاج سنة 2000 هو (وحدة)  $10000 = 25000 \times \frac{40}{100}$

ومنه إنتاج المصنع سنة 2001 هو  $15000 = 25000 - 10000$ .

لدينا الـ 40% من إنتاج سنة 2000 هو (وحدة)  $6000 = 15000 \times \frac{40}{100}$

ومنه إنتاج المصنع سنة 2002 هو  $9000 = 15000 - 6000$ .

(2)  $p_n$  بدلالة  $n$

لدينا  $p_{n+1} = p_n - \frac{40}{100} p_n$  ومنه  $p_{n+1} = \frac{3}{5} p_n$  وبالتالي  $(p_n)$  متتالية هندسية

أساسها  $q = \frac{3}{5}$  وحدها الأول  $p_0 = 25000$ . ومنه  $p_n = 25000 \left(\frac{3}{5}\right)^n$

التمرين 108

(1) متتالية معرفة كما يلي:  $v_1 = 1$  و  $5v_{n+1} = v_n + 8$

(2) نضع  $u_n = v_n - 2$ . برهن أن  $(u_n)$  متتالية هندسية.

الحل

(1) حساب  $v_2, v_3, v_4$

من العلاقة  $5v_{n+1} = v_n + 8$  نجد  $v_{n+1} = \frac{v_n + 8}{5}$  وبالتالي:

$$v_4 = \frac{v_3 + 8}{5} = \frac{\frac{49}{25} + 8}{5} = \frac{249}{125}, v_3 = \frac{v_2 + 8}{5} = \frac{\frac{9}{5} + 8}{5} = \frac{49}{25}, v_2 = \frac{v_1 + 8}{5} = \frac{9}{5}$$

(2)  $(u_n)$  متتالية هندسية:

حتى تكون  $(u_n)$  متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا  $q$  بحيث يكون  $u_{n+1} = u_n \times q$

من العلاقة  $u_n = v_n - 2$  نجد  $u_{n+1} = v_{n+1} - 2$

$$u_{n+1} = \frac{v_n + 8}{5} - 2 = \frac{v_n - 2}{5} = \frac{1}{5}(v_n - 2) = \frac{1}{5}u_n \quad \text{فإن} \quad v_{n+1} = \frac{v_n + 8}{5}$$

وبالتالي  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$ .

التمرين 109

لتكن  $(u_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي:

$$u_1 = -3 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 \quad \text{من أجل} \quad n \geq 1$$

(1) احسب  $u_2, u_3, u_4$ .

(2) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي:  $v_n = u_n + 18$ , من أجل  $n \geq 1$

برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية. اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم اكتب  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) احسب  $v_{11}$  باستعمال الآلة الحاسبة.

(4) احسب نهاية المتتالية  $(v_n)$  ثم استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

الحل

(1) حساب  $u_2, u_3, u_4$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 6 = \frac{2}{3}(-3) - 6 = -8 \quad \text{من} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 \quad \text{نجد}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 - 6 = \frac{2}{3}(-8) - 6 = -\frac{34}{3}$$

$$u_4 = \frac{2}{3}u_3 - 6 = \frac{2}{3}\left(-\frac{34}{3}\right) - 6 = -\frac{68}{9} - 6 = -\frac{122}{9}$$

(2)  $(v_n)$  متتالية هندسية:

حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا  $q$  بحيث يكون  $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 18 \quad \text{فإن} \quad v_n = u_n + 18$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 + 18 = \frac{2}{3}u_n + 12 \quad \text{فإن} \quad (1) \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6$$

وبما أن  $v_n = u_n + 18$  فإن  $u_n = v_n - 18$  وبالتعويض  $u_n$  في (1) نجد

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - 18) + 12 = \frac{2}{3}v_n \quad \text{وبالتالي} \quad (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{3}.$$



كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  بما أن الحد الأول هو  $v_1$  فإن  $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

وبما أن  $v_1 = u_1 + 18 = +15$  و  $q = \frac{2}{3}$  فإن  $v_n = (15) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$

بما أن  $v_n = u_n + 18$  فإن  $u_n = v_n - 18$  وبالتالي  $u_n = (15) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 18$

حساب  $v_{11}$  :  $v_{11} = (15) \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 18 = -17.73...$  وهذا باستعمال اللمسة  $y^x$

(4) حساب نهايتي المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(u_n)$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (15) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$  لأن  $-1 < q < +1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - 18) = -18$  لأن  $u_n = v_n - 18$

التمرين 110

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N} - \{0\}$  كما يلي :

$u_1 = 6$  و  $5u_n = u_{n-1} + 4$  من أجل  $n \geq 2$

(1) احسب  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $u_4$ .

(2) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N} - \{0\}$  بـ  $v_n = u_n - 1$ .

برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية عين حدها الأول والأساس.

اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) احسب نهاية المتتالية  $(v_n)$  ثم استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

الحل

(1) حساب  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $u_4$

بما أن  $5u_n = u_{n-1} + 4$  فإن  $u_n = \frac{u_{n-1} + 4}{5}$  وبالتالي  $u_2 = \frac{u_1 + 4}{5} = \frac{6 + 4}{5} = 2$

$u_3 = \frac{u_2 + 4}{5} = \frac{2 + 4}{5} = \frac{6}{5}$  ،  $u_4 = \frac{u_3 + 4}{5} = \frac{\frac{6}{5} + 4}{5} = \frac{26}{25}$

(2) متتالية هندسية :

حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا  $q$  بحيث يكون :  $v_n = v_{n-1} \times q$

بما أن  $v_n = u_n - 1$  و  $u_n = \frac{u_{n-1} + 4}{5}$  فإن (1)  $v_n = \frac{u_{n-1} + 4}{5} - 1 = \frac{u_{n-1} - 1}{5}$

وبما أن  $v_n = u_n - 1$  فإن  $v_{n-1} = u_{n-1} - 1$  وبتعويض  $u_{n-1}$  في (1) نجد

$v_n = \frac{v_{n-1} + 1 - 1}{5} = \frac{1}{5} v_{n-1}$  وبالتالي  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$

كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  بما أن الحد الأول هو  $v_1$  فإن  $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

وبما أن  $v_1 = u_1 - 1 = 6 - 1 = 5$  و  $q = \frac{1}{5}$  فإن  $v_n = (5) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$

بما أن  $v_n = u_n - 1$  فإن  $u_n = v_n + 1$  وبالتالي  $u_n = (5) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1$

(4) حساب نهايتي المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(u_n)$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (5) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$  لأن  $-1 < q < +1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + 1) = 1$  لأن  $u_n = v_n + 1$

التمرين 111

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$

(1) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي  $v_n = u_n + \frac{3}{2}$

برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول.

(2) استنتج  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) احسب نهاية المتتالية  $(v_n)$  ثم استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

(4) جد ، بدلالة  $n$  ، المجموعين  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الحل

(1) متتالية هندسية

حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية يكفي أن نجد عددا حقيقيا  $q$  بحيث يكون :  
 $v_n = v_{n-1} \times q$  من أجل كل عدد حقيقي  $n$  غير معدوم .

من العلاقتين  $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{2}$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$  نجد  $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1 + \frac{3}{2}$

ومنه  $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$  وبالتالي  $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + \frac{3}{2}\right)$

وبما أن  $v_n = u_n + \frac{3}{2}$  ، فإن  $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$  .

الخلاصة :  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = u_0 + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

(2) استنتاج  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $v_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

وبما أن  $v_n = u_n + \frac{3}{2}$  فإن  $u_n = v_n - \frac{3}{2}$  وبالتالي  $u_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$

(3) حساب نهايتي المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$

لأن  $-1 < q < +1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

لأن  $u_n = v_n - \frac{3}{2}$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

(4) حساب المجموعين  $T_n$  و  $S_n$

لدينا  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left( \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$  وبتعويض قيمتي  $v_0$  و  $q$  نجد :

$$S_n = \frac{7}{2} \left( \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \right)$$

ولدينا

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(v_0 - \frac{3}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{3}{2}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \dots - \frac{3}{2} = S_n + (n+1)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

## التمرين 112

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}u_n$

(1) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي :

حيث  $v_n = u_n - \alpha$  ، حيث  $\alpha$  عدد حقيقي يحقق  $\alpha = 1 + \frac{2}{3}\alpha$

عين  $\alpha$  ثم برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول .

(2) استنتج  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

## الحل

(1) تعيين  $\alpha$  لدينا  $\alpha = 1 + \frac{2}{3}\alpha$  تكافئ  $\alpha - \frac{2}{3}\alpha = 1$  أي  $\frac{1}{3}\alpha = 1$  ومنه  $\alpha = 3$

(1)  $(v_n)$  متتالية هندسية لدينا  $v_n = u_n - 3$

من العلاقتين  $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$  و  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}u_n$  نجد  $v_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}u_n - 3$

ومنه  $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2$  وبالتالي  $v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - 3)$

وبما أن  $v_n = u_n - 3$  ، فإن  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$  .

الخلاصة :  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = u_0 - 3 = -3$

(2) استنتاج  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

وبما أن  $v_n = u_n - 3$  فإن  $u_n = v_n + 3$  وبالتالي  $u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

(3) اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

ليكن الفرق  $u_{n+1} - u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \left[ -\frac{2}{3} + 1 \right] = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n > 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})$  .

(4) استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \frac{\left( \frac{1}{2} \right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

لدينا

$$u_n = u_0 + 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = 3 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

ومنه

### التمرين 114

لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية معرفة بحدها الأول  $u_1 = -48$  وحدها الثامن  $u_8 = \frac{3}{8}$

(1) عين الأساس والحد العام لهذه المتتالية.

(2) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  تقبل نهاية محدودة عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$  .

### الحل

(1) نعين الأساس والحد العام : بما أن الحد الأول هو  $u_1$  فإن  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

من أجل  $n = 8$  نجد  $u_8 = u_1 \times q^7$  وبالتالي :  $\frac{3}{8} = -48 \times q^7$

ومنه  $q = -\frac{1}{2}$  وبالتالي  $q^7 = -\frac{3}{384} = -\frac{1}{128} = \left( -\frac{1}{2} \right)^7$

وعبارة الحد العام هي :  $u_n = -48 \times \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

نهاية  $u_n$  عندما تنتهي  $n$  إلى  $+\infty$  بما أن  $-1 < q < +1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

### التمرين 115

إن استهلاك دولة للسكر حاليا، يقدر بـ 3.5 مليون طن ويزيد بانتظام بـ 10% سنويا. ليكن  $f(0)$  الاستهلاك الحالي للسكر.

وليكن  $f(n)$  الاستهلاك لمدة  $n$  سنة ( $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ) .

(1) احسب  $f(1)$  ،  $f(2)$  ،  $f(3)$  . جد علاقة بين  $f(n)$  و  $f(n+1)$  . اكتب  $f(n)$  بدلالة  $f(0)$  و  $n$  .

### التمرين 113

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_1 = 2$  و  $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(1) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  . برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول .

(2) استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(3) برهن أنه من أجل كل  $n$  ،  $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})$  .

(4) استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

### الحل

(1)  $(v_n)$  متتالية هندسية لدينا  $v_n = u_{n+1} - u_n$

من العلاقتين  $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$  و  $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$  نجد :

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

وبالتالي

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

وبما أن  $v_n = u_{n+1} - u_n$  ، فإن  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$  .

الخلاصة :  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

(2) استنتاج  $v_n$  بدلالة  $n$  من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $v_n = (1) \left( \frac{1}{2} \right)^n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$

(3) المساواة  $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})$

لنحسب المجموع  $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  بالطريقة الآتية :

$$v_0 = u_1 - u_0$$

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

جمع المساويات طرفا إلى طرف ، تختفي حدود ويبقى معنا الآتي :

$$u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) = u_0 + (u_n - u_0)$$

ومنه  $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_0$

(2) كم يلزم من سنة ليتضاعف الاستهلاك الحالي للمسكر في هذه الدولة.

الحل

(1) حساب  $f(1)$  و  $f(2)$  و  $f(3)$

بما أن  $f(0) = 3.5$  فإن  $f(1) = f(0) + (10\% \text{ من } f(0))$  وبالتالي

$$f(1) = f(0) + \frac{10}{100} f(0) = f(0) + 0.1f(0) = 1.1 \times f(0) \\ = 1.1 \times 3.5 = 3.85 \text{ (مليون طن)}$$

$$f(2) = f(1) + \frac{10}{100} f(1) = f(1) + 0.1f(1) = 1.1 \times f(1) \\ = 1.1 \times 3.85 = 4.235 \text{ (مليون طن)}$$

$$f(3) = f(2) + \frac{10}{100} f(2) = f(2) + 0.1f(2) = 1.1 \times f(2) \\ = 1.1 \times 4.235 = 4.6585 \text{ (مليون طن)}$$

العلاقة بين  $f(n)$  و  $f(n+1)$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{10}{100} f(n) = f(n) + 0.1f(n) = 1.1 \times f(n)$$

كتابة  $f(n)$  بدلالة  $f(0)$  و  $n$  إذا وضعنا  $u_n = f(n)$  نجد  $u_{n+1} = 1.1 \times u_n$

ومنه  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها 1.1 و حدها الأول  $u_0 = f(0)$ .

وبالتالي عبارة الحد العام هي  $u_n = u_0 (1.1)^n$  ومنه  $f(n) = f(0) \times (1.1)^n$ .

(2) عدد السنوات اللازمة ليتضاعف الاستهلاك أي يصبح  $2f(0)$ .

$$2f(0) = f(0) \times (1.1)^n \text{ ومنه } f(n) = 2f(0)$$

وبقسمة الطرفين على  $f(0)$  نجد  $2 = (1.1)^n$  باستعمال الآلة الحاسبة نجد  $7 < n < 8$  أي بعد 7 سنوات.

التمرين 116

في أول جانفي 2000 أحصت مدينة A 200 000 ساكنا , وفي نفس التاريخ أحصت مدينة أخرى B 150 000 ساكنا.

نعتبر أن سكان المدينة A يتناقصون بنسبة سنوية قدرها 3% والعكس بالنسبة إلى سكان المدينة B فهم يتزايدون بنسبة سنوية قدرها 5%.

(1) ما هو عدد سكان المدينتين A و B في أول جانفي 2001 وفي أول جانفي 2002 ؟

(2) من أجل كل عدد طيعي  $n$ ,

نرمز بالرمز  $a_n$  لعدد سكان المدينة A في أول جانفي من السنة  $(2000 + n)$ .

ونرمز بالرمز  $b_n$  لعدد سكان المدينة B في نفس التاريخ.

أ - بين أن  $(a_n)$  و  $(b_n)$  متتايتان هندسيتان . عين أساسيهما .

ب - جد  $a_n$  و  $b_n$  بدلالة  $n$ .

ج - في أول جانفي من أي سنة يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A لأول مرة ؟

الحل

(1) - عدد سكان المدينة A في أول جانفي 2001 هو

$$200000 - \frac{3}{100} \times 200000 = 194000 \text{ (ساكنا)}$$

(1) - عدد سكان المدينة B في أول جانفي 2001 هو

$$150000 + \frac{5}{100} \times 150000 = 157500 \text{ (ساكنا)}$$

(2) أ - المتتالية  $(a_n)$  متتالية هندسية

ليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة  $(2000 + n)$  هو  $a_n$ .

وليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة الموالية  $(2000 + (n+1))$  هو  $a_{n+1}$ .

$$\text{لدينا , حسب المعطيات , } a_{n+1} = a_n - \frac{3}{100} a_n \text{ ومنه } a_{n+1} = 0.97 a_n$$

الخلاصة :  $(a_n)$  متتالية هندسية أساسها 0.97 .

(2) أ - المتتالية  $(b_n)$  متتالية هندسية

ليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة  $(2000 + n)$  هو  $b_n$ .

وليكن عدد السكان في أول جانفي في السنة الموالية  $(2000 + (n+1))$  هو  $b_{n+1}$ .

$$\text{لدينا , حسب المعطيات , } b_{n+1} = b_n + \frac{5}{100} b_n \text{ ومنه } b_{n+1} = 1.05 b_n$$

الخلاصة :  $(b_n)$  متتالية هندسية أساسها 1.05 .

(2) ب -  $a_n$  و  $b_n$  بدلالة  $n$

بما أن  $(a_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $a_0 = 200000$  وأساسها  $q = 0.97$  فإن

$$a_n = 200000 \times (0.97)^n$$

وبما أن  $(b_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $b_0 = 150000$  وأساسها  $q = 1.05$  فإن

على الترتيب  $u_1$  و  $u_2$ . اقترح رابطاً على سلوك المتتالية  $(u_n)$ .

ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_n \geq e$  (يمكن استعمال 1. ب).

ج. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $l$  من المجال  $[e, +\infty[$ .

الجزء ب

نعلم أن الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[1, +\infty[$ .

1. برهن أن  $f(l) = l$ .

2. استنتج قيمة  $l$ .



الجزء أ

1. أ. تعيين نهايتي  $f$  عند  $1$  وعند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ب. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

$$f'(x) = \frac{(1)(\ln x) - \left(\frac{1}{x}\right)(x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}, \quad x \in [1, +\infty[$$

إن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $\ln x - 1$  ومنه:

$$\ln x - 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad f'(x) = 0$$

أي أن  $\ln x = 1$  ومنه  $\ln x = \ln e$  وبالتالي  $x = e$ .

$$\ln x - 1 < 0 \quad \text{تكافئ} \quad f'(x) < 0$$

أي أن  $\ln x < 1$  ومنه  $\ln x < \ln e$  وبالتالي  $x < e$ .

$$\ln x - 1 > 0 \quad \text{تكافئ} \quad f'(x) > 0$$

أي أن  $\ln x > 1$  ومنه  $\ln x > \ln e$  وبالتالي  $x > e$ .

جدول التغيرات:

$x$	1	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$e$	$+\infty$

$$b_n = 150000 \times (1.05)^n$$

2. ج. السنة التي يفوق فيها عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A.

لنبحث عن العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $b_n > a_n$ .

$$\text{لكن } b_n > a_n \text{ يكافئ } 150000 \times (1.05)^n > 200000 \times (0.97)^n$$

$$\text{ومنه } \left(\frac{1.05}{0.97}\right)^n > \frac{4}{3} \text{ وبالتالي } 3 \times (1.05)^n > 4 \times (0.97)^n$$

وباستعمال الآلة الحاسبة نجد  $n = 4$ .

الخلاصة: في أول جانفي 2004 يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A.



الجزء أ

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1, +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

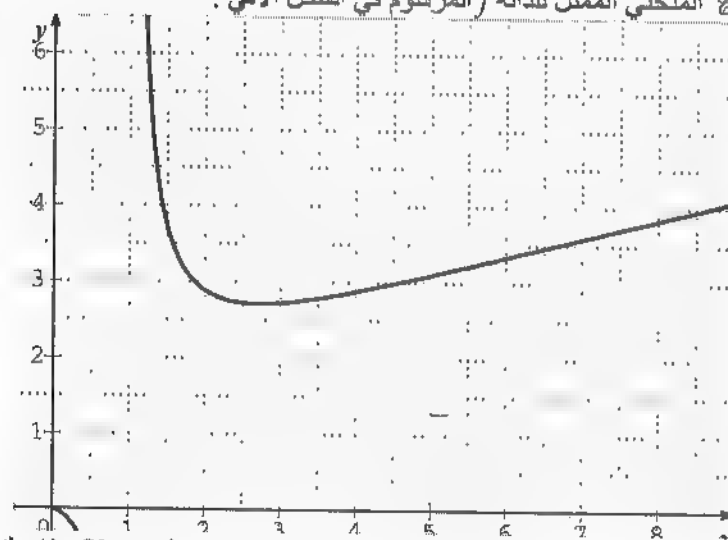
1. أ. عين نهايتي  $f$  عند  $1$  وعند  $+\infty$ .

ب. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2. لتكن  $(u_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي:

$$u_0 = 5 \text{ و } u_{n+1} = f(u_n) \text{ , من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

أ. ليكن  $\mathcal{C}$  المنحني الممثل للدالة  $f$  المرسوم في الشكل الآتي:

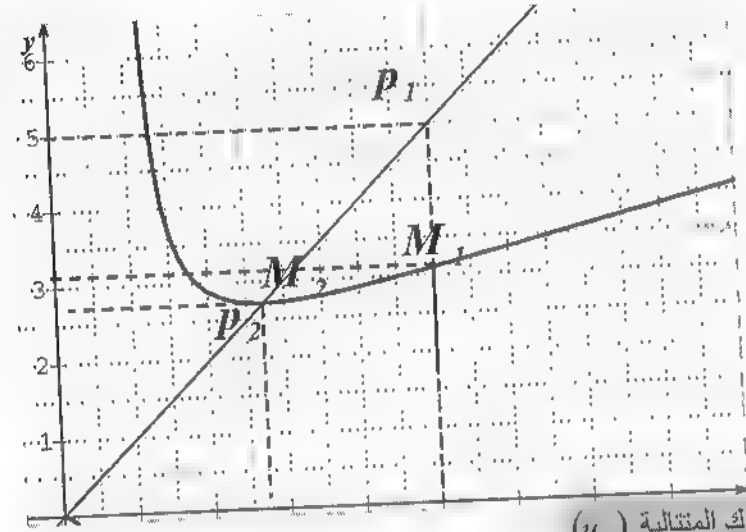


ارسم المستقيم ذا المعادلة  $y = x$  والنقطتين  $M_1$  و  $M_2$ , من المنحني  $\mathcal{C}$ , فاصلتاها

2. رسم المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $y = x$  والنقطتين  $M_1$  و  $M_2$ .

فاصلة  $M_1$  هي  $u_1 = f(u_0) = f(5) = \frac{5}{\ln 5} = 3.1$  وترتيبها  $u_2 = f(u_1) = 2.73$ .

فاصلة  $M_2$  هي  $u_2 = f(u_1) = 2.73$  وترتيبها  $u_3 = f(u_2) = 2.71$ .



2. سلوك المتتالية  $(u_n)$ .

نلاحظ أن  $\mathcal{C}$  و  $(D)$  يتقاطعان في النقطة  $H(e, e)$  ولدينا :

فاصلة النقطة  $M_1$  من  $\mathcal{C}$  هي  $u_1$  وترتيبها  $u_2$ .

فاصلة النقطة  $P_1$  من  $(D)$  هي  $u_2$  وترتيبها  $u_3$ .

فاصلة النقطة  $M_2$  من  $\mathcal{C}$  هي  $u_2$  وترتيبها  $u_3$ .

فاصلة النقطة  $P_2$  من  $(D)$  هي  $u_3$  وترتيبها  $u_4$ .

فاصلة النقطة  $M_3$  من  $\mathcal{C}$  هي  $u_3$  وترتيبها  $u_4$ .

إن استعمال هذين المنحنيين يسمح بتشكيل متتالية نقاط من  $\mathcal{C}$  أو من  $(D)$  فواصلها ، على الترتيب ،  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ .

الخلاصة : يقودنا المنحني إلى التخمين بأن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومتقاربة ونهايتها  $e$ .

ملاحظة : إنه مجرد تخمين يمكن استغلاله لإنجاز مخطط عمل نستعمله لدراسة المتتالية.

2. ب. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq e$ .

باستعمال السؤال 1. ب ، نجد من أجل كل  $x$  من  $]1, +\infty[$  ،  $f(x) \geq e$ .

إن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq e$ .

ملاحظة : يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

2. ج. المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $l$  من المجال  $[e, +\infty[$ .

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq e$  فإن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد  $e$ .

$$\text{ولدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$$

وبما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $[e, +\infty[$  ،  $1 - \ln u_n \leq 0$  فإن  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

الخلاصة : المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو  $l$  من  $[e, +\infty[$ .

الجزء ب :

1. لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  وبما أن الدالة  $f$  مستمرة عند  $l$  فإن  $l$  هي حل

$$\text{للمعادلة } l = \frac{l}{\ln l}.$$

2. لتكن  $l(\ln l - 1) = 0$ . إذن للمعادلة حلان هما :  $0, e$ .

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq e$  فإن  $l = e$ .

كان ليوناردو دو بيز Leonard de Pise الملقب بفيبوناتشي Fibonacci

من أكبر علماء الرياضيات وقد ولد عام 1170 م بمدينة Pise

بإيطاليا . سافر كثيرا بهدف تعلم طرق الحساب المستعملة في الشرق

والعلاقات الرياضية المستعملة في بناء الأهرامات وإثر عودته إلى

إيطاليا اصدر عدة كتب ، ويرجع له الفضل في تعريف الغرب

بالأرقام العربية بما فيها العدد 0 كما أنه استعمل كلمة sinus.

قام بدراسة المتتالية التي تعرف باسمه والتي حدودها هي :

1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 8 ، 13 ، 21 ، 34 ، 55 ، 89 ، 144 ، ...

نلاحظ أنه انطلاقا من الحد الثالث يتم الحصول على أي حد بجمع

الحدين السابقين ، كما نلاحظ أن النسبة بين أي حدين متتابعين تؤول

إلى العدد الذهبي بقيم أصغر وقيم أكبر فمثلا :

$$\frac{144}{89} = 1.6179... , \frac{89}{55} = 1.6181... , \frac{55}{34} = 1.6167...$$

قوم نفسك في  
المتنوعات

## 4 نقاط

## التمرين 1

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_1 = 6 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1} ; n \geq 1$$

1. احسب  $u_2$  و  $u_3$ .

2. نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$  المعرفتين على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

(a) احسب :  $w_1, w_0, v_1, v_0$ .

(b) بين أن كلا من المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$  هندسية، عين أساسيهما.

(c) احسب كلا من  $w_n, v_n$  بدلالة  $n$ . استنتج بدلالة  $n$ .

(d) احسب نهاية  $u_n$ .

## 3 نقاط

## التمرين 2

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_0 = 1 \quad \text{و من كل عدد طبيعي } n, \quad 3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$$

لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = u_n - n$ .

1. (a) بين أن  $(v_n)$  هندسية، عين أساسها وحدها الأول.

(b) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ، ثم احسب نهاية  $u_n$ .

2. (a) احسب المجموع عين :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99$$

$$S' = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{98} + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$$



2. (أ) بين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$  .

(ب) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  .

(ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة واحسب نهايتها.

5 نقاط

التمرين 5

الجزء أ:

تعطى نقطتان مختلفتان  $A_0$  و  $B_0$  من مستقيم ، لتكن النقطة  $A_1$  منتصف

القطعة  $[A_0B_0]$  و  $B_1$  مرجح الجملة  $\{(A_0,1), (B_0,2)\}$  .

ثم من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$A_{n+1}$  منتصف القطعة  $[A_nB_n]$  و  $B_{n+1}$  مرجح الجملة  $\{(A_n,1), (B_n,2)\}$  .

1. عَلمَ النقاط  $A_1$  ،  $B_1$  ،  $A_2$  ،  $B_2$  من أجل  $A_0B_0 = 12cm$  .

ما هي العلاقة التي تربط  $A_n$  و  $B_n$  عندما يكون  $n$  كبيرا جدا ؟

2. نزود المستقيم  $(A_0B_0)$  بالمعلم  $(A_0, \bar{i})$  حيث  $\bar{i} = \frac{1}{12} \overline{A_0B_0}$  .

لتكن  $u_n$  و  $v_n$  ، على الترتيب ، فاصلتي النقطتين  $A_n$  و  $B_n$  .

تحقق من أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  موجب تماما ، لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

الجزء ب:

لتكن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتان كما يلي:  $u_0 = 0$  ،  $v_0 = 12$  ،

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. لتكن المتتالية  $(w_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = v_n - u_n$  .

بين أن  $(w_n)$  هندسية متقاربة وجميع حدودها موجبة .

2. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة والمتتالية  $(v_n)$  متناقصة .

3. استنتج من السؤالين السابقين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان وأن لهما نفس النهاية .

4. نعتبر المتتالية  $(t_n)$  المعرفة كما يلي:  $t_n = 2u_n + 3v_n$  .

بين أنها ثابتة.

$$(b) \text{ استنتج أن : } u_0 + u_1 + \dots + u_{98} + u_{99} = 4953 - 3 \left( \frac{2}{3} \right)^{100}$$

5 نقاط

التمرين 3

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

1. بين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_n > 1$  .

2. ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  .

3. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

4. (أ) بين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$  .

(ب) استنتج أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_n - 1 \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}$  .

احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5 نقاط

التمرين 4

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  كما يلي:  $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$  .

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ولتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

1. (أ) بين أن الدالة  $g: x \rightarrow x^2 - x^3$  متزايدة على المجال  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  .

(ب) استنتج أن  $f$  متزايدة على نفس المجال .

(ج) بين أن  $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$  .

## التمرين 6

## 5 نقاط

سعيد ورضا يلعبان التنس (tennis).

هذان اللاعبان لهما نفس الحظ بالفوز بالمقابلة الأولى.

أما بقية المقابلات فوضعها كما يلي : إذا فاز سعيد بمقابلة يكون احتمال فوزه في المقابلة الموالية هو 0.7 ، وإذا خسر مقابلة يكون احتمال خسارته في المقابلة الموالية هو 0.8 . في كل التمرين،  $n$  عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر الحوادث الآتية :

$G_n$  : " يفوز سعيد بالمقابلة النونية "

$P_n$  : " يخسر سعيد المقابلة النونية "

نضع :  $p_n = p(G_n)$  و  $q_n = p(P_n)$  .

1. البحث عن علاقة تراجعية.

(a) عين  $p_1$  ثم الاحتمالين الشرطين  $p_{G_1}(G_2)$  ،  $p_{P_1}(G_2)$  .

(b) علل المساواة  $p_n + q_n = 1$  .

(c) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$  .

2. دراسة المتتالية  $(p_n)$  .

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $v_n = p_n - \frac{2}{5}$  .

(a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية ، عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(b) استنتج عبارة  $p_n$  بدلالة  $n$  .

(c) حين نهاية المتتالية  $(p_n)$  عندما تنتهي  $n$  إلى  $+\infty$  .

## التمرين 7

## 5 نقاط

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. احسب  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v_3$  .

2. في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (وحدة الرسم : 5cm) ارسم المستقيمين

$D$  و  $\Delta$  اللذين معادلتاهما ، على الترتيب ،  $y = x$  و  $y = \frac{3x + 1}{4}$  .

استعمل  $D$  و  $\Delta$  لإنشاء ، على محور الفواصل ، النقط  $A_1$  ،  $A_2$  ،  $A_3$  التي فواصلها على الترتيب  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  وكذلك النقط  $B_1$  ،  $B_2$  ،  $B_3$  التي فواصلها على الترتيب  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v_3$  .

3. نعتبر المتتالية  $(s_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $s_n = u_n + v_n$  .

(a) احسب  $s_0$  ،  $s_1$  ،  $s_2$  ،  $s_3$  . ماذا تستنتج ؟

(b) باستعمال البرهان بالتراجع ، بين أن المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

4. نعتبر المتتالية  $(d_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $d_n = v_n - u_n$  .

(a) بين أن المتتالية  $(d_n)$  هندسية .

(b) أعط عبارة  $d_n$  بدلالة  $n$  .

5. استنتج عبارتي  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  .

6. بين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان . عين نهايتهما .

## التمرين 8

## 4 نقاط

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$  .

1. بين أن :  $f([3, +\infty[) = [3, +\infty[$  .

2. نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = 4$  ،  $u_{n+1} = u_n - 2 + \frac{4}{u_n - 1}$  ،  $n \in \mathbb{N}$  .

(a) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \geq 3$  .

(b) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة .

(c) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ، عين نهايتها .

3. لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = u_n - 3$  .

(a) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}v_n^2$  .

(b) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1}$  .

(c) استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  ثم  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

# الأعداد المركبة

## التمرين 9

5 نقاط

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين ، باستعمال البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$ .
2. بين أن  $(u_n)$  متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .
3. لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = 12 - u_n^2$ 
  - (a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية ، عين أساسها وحدها الأول.
  - (b) احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .
  - (c) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
  - (d) احسب ، بدلالة  $n$  ، المجموع :  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$ .

## التمرين 10

5 نقاط

$$\text{نعتبر المتتالية } (a_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } a_n = \frac{n}{3^n}.$$

1. برهن باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3^n > n^2$ .
2. استنتج أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

3. نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :
  - (a) احسب  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $u_4$ .
  - (b) بين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ،  $u_n > 0$ .
4. لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $v_n = \frac{u_n}{n}$ 
  - (a) احسب  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v_3$ .
  - (b) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ، عين أساسها.
  - (c) عين  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### الشكل الجبري - الحساب في $\mathbb{C}$

- نقول عن العدد المركب  $z$  إنه مكتوب على الشكل الجبري إذا كان مكتوبا على الشكل الآتي  
 $z = a + ib$  , حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان و  $i^2 = -1$
- $a$  هو الجزء الحقيقي للعدد المركب  $z$  , نرمز له بالرمز  $Re(z)$  .
- $b$  هو الجزء التخيلي للعدد المركب  $z$  , نرمز له بالرمز  $Im(z)$  .
- يكون العدنان المركبان  $z$  و  $z'$  حيث  $z = a + ib$  ,  $z' = a' + ib'$  إذا تحقق ما يلي :  
 $a = a'$  و  $b = b'$  .
- لكتابة حاصل قسمة عددين مركبين على الشكل الجبري , نضرب كلا من البسط والمقام في مرافق المقام ( إن لم يكن حقيقيا ) .
- مرافق العدد المركب  $z = a + ib$  هو العدد المركب  $\bar{z} = a - ib$  .
- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$  .
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$  ,  $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$  ,  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$  , حيث  $(z' \neq 0)$  .
- يكون العدد المركب  $z$  حقيقيا إذا وفقط إذا كان  $Im(z) = 0$   
 $\bar{z} = z$  إذا وفقط إذا كان
- يكون العدد المركب  $z$  تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان  $Re(z) = 0$   
 $\bar{z} = -z$  إذا وفقط إذا كان

### أمثلة

(1) لنكتب العدد المركب  $\frac{1+3i}{3-2i}$  على الشكل الجبري :

• لنضرب كلا من البسط والمقام في مرافق المقام  $(3+2i)$  كما يلي :

$$\frac{1+3i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i+9i+6i^2}{9+4} = \frac{3+2i+9i-6}{13} = \frac{-3+11i}{13}$$

ومنه  $\frac{1+3i}{3-2i} = -\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$

(2) لنحل المعادلة :  $\frac{1+iz}{z} = -1+3i$

من أجل  $z \neq 0$  ,  $\frac{1+iz}{z} = -1+3i$  تكافئ  $1+iz = (-1+3i)z$

وتكافئ  $1 = (-1+2i)z$

ومنه  $z = \frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{1+4} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$



(1) حساب  $(3+2i)(3-2i)$ :

$$(3+2i)(3-2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$$

(2) كتابة الأعداد على الشكل الجبري:

$$\frac{1}{3+2i} = \frac{1}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$



(1) اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية:

$$\frac{2+i}{i}, \frac{i}{1-3i}, \frac{2-i}{5+3i}, \frac{4}{\sqrt{3}-i}, \frac{1}{2+7i}$$

(2) حل في  $\mathbb{C}$ , المعادلة  $(1-i)z = 3-2i$ . أعط الحل على الشكل الجبري.

(3) هل أن العدد المركب  $2-i$  حل للمعادلة  $(1-i)z + 1 + 3i = 0$  ؟

(4) هل أن العدد المركب  $\frac{1+3i}{5}$  حل للمعادلة  $5z^2 - 2z + 2 = 0$  ؟

$$\frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i} + \frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i}$$



(1) كتابة الأعداد على الشكل الجبري:

$$\frac{1}{2+7i} = \frac{1}{2+7i} \times \frac{2-7i}{2-7i} = \frac{2-7i}{53} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}-i} = \frac{4}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{4} = \sqrt{3}+i$$

إذن للمعادلة حل وحيد هو  $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

(3) لنحل المعادلة:  $(1+i)z = \bar{z} - 2 + 3i$ .

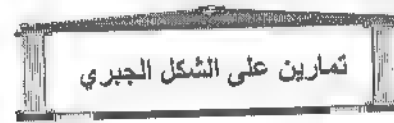
نضع  $z = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

لدينا  $(1+i)z = \bar{z} - 2 + 3i$  تكافئ  $(1+i)(x+iy) = (x-iy) - 2 + 3i$

وتكافئ  $(x-y) + i(x+y) = (x-2) + i(-y+3)$

$$\begin{cases} x-y = x-2 \\ x+y = -y+3 \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

إذن للمعادلة حل وحيد هو  $z = -1 + 2i$ .



تمارين على الشكل الجبري



التمرين 118

ليكن العدنان المركبان  $z = 2+3i$  ,  $z' = i-5$ .

احسب واكتب على الشكل الجبري  $z^2$  ,  $z \cdot z'$  ,  $2z - 3z'$  ,  $z - z'$  ,  $z + z'$ .



الحل

احسب كما كنت تحسب في  $\mathbb{R}$

فقط انتبه إلى أن:  $i^2 = -1$

$$z + z' = -3 + 4i$$

$$z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 7 + 2i$$

$$2z - 3z' = 2(2+3i) - 3(i-5) = 19 + 3i$$

$$z \cdot z' = (2+3i)(i-5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = -13 - 13i$$

$$z^2 = (2+3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$



التمرين 119

(1) احسب  $(3+2i)(3-2i)$ . استنتج الشكل الجبري للعدد  $\frac{1}{3+2i}$ .

(2) عين الشكل الجبري للأعداد المركبة:  $\frac{1}{i}$  ,  $\frac{1}{3-i}$  ,  $\frac{1}{1+i}$ .

$$\frac{2-i}{5+3i} = \frac{2-i}{5+3i} \times \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{10-6i-5i+3i^2}{34} = \frac{10-6i-5i-3}{34} = \frac{7-11i}{34} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$$

$$\frac{i}{1-3i} = \frac{i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{i+3i^2}{10} = \frac{-3+i}{10} = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$\frac{1}{2+7i} = \frac{1}{2+7i} \times \frac{2-7i}{2-7i} = \frac{2-7i}{53} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i$$

$$\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-2i-i^2}{1} = 1-2i$$

(2) حل المعادلة  $(1-i)z = 3-2i$  :

لدينا  $(1-i)z = 3-2i$  يكافئ  $z = \frac{3-2i}{1-i}$

كتابة  $\frac{3-2i}{1-i}$  على الشكل الجبري :  $\frac{3-2i}{1-i} = \frac{3-2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

(3) لنعوض  $2-i$  في المعادلة  $(1-i)z + 1 + 3i = 0$  فنجد :

$$2-i-2i-1+1+3i=0 \text{ وهذه تكافئ } (1-i)(2-i)+1+3i=0$$

وتكافئ  $2=0$  وهذا غير صحيح ، وبالتالي :

العدد المركب  $2-i$  ليس حلا للمعادلة  $(1-i)z + 1 + 3i = 0$  .

(4) لنعوض  $\frac{1+3i}{5}$  في المعادلة  $5z^2 - 2z + 2 = 0$  فنجد :

$$\frac{-8+6i}{5} - \frac{2+6i}{5} + 2 = 0 \text{ وهذه تكافئ } 5\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{1+3i}{5}\right) + 2 = 0$$

$$-8+6i-2-6i+10=0 \text{ وتكافئ}$$

$$0=0 \text{ وهذا صحيح وبالتالي:}$$

العدد المركب  $\frac{1+3i}{5}$  حل للمعادلة  $5z^2 - 2z + 2 = 0$  .

(5) تبسيط العدد المركب :

$$\frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i} + \frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i} = \frac{(\sqrt{7}+5i)^2 + (2\sqrt{7}-2i)^2}{(2\sqrt{7}-2i)(\sqrt{7}+5i)} = \frac{6+2\sqrt{7}i}{24+8\sqrt{7}i} = \frac{1}{4}$$

### الشكل المثلثي - الطويلة والعقدة

من أجل العدد المركب  $z = a+ib$  ، حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان و  $i^2 = -1$  .

• طويلة  $z$  هي :  $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$  .

$$\text{فمثلا : } |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

• من أجل  $z \neq 0$  ، العدد الحقيقي  $\theta$  حيث :  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$  هو عمدة للعدد  $z$  .

ونكتب  $\arg z = \theta + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  .

فمثلا : لتكن  $\theta$  عمدة للعدد المركب  $1+i\sqrt{3}$  . أي أن  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه  $\arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  .

• يكون العدد المركب  $z$  حقيقيا إذا فقط إذا كان  $\arg z = k\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$  .

• يكون العدد المركب  $z$  تخيليا صرفا إذا فقط إذا كان  $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$  .

ترميز أولير : من أجل كل عدد حقيقي  $\theta$  نضع  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  .

نتائج :

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} , e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} , \overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} , |e^{i\theta}| = 1$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} , \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)} , \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

### الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

• إذا كان  $z$  عددا مركبا غير معدوم ، طويلته  $r$  و  $\theta$  عمدة له ، نكتبه على الشكل الآتي :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ وهو الشكل المثلثي للعدد المركب } z .$$

ملاحظة : يمكن استعمال ترميز أولير فنحصل على الشكل الآتي :  $re^{i\theta}$  وهو ، أيضا ، الشكل المثلثي للعدد المركب  $z$  .

الخلاصة : إذا كتب العدد المركب  $z$  على الشكل  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  أو على

$$\text{إذن } (-1+i)^{12} = -64$$

مثال (3). ليكن العددان المركبان  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  و  $z_2 = \sqrt{3} + i$

اكتب الأعداد:  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$  على الشكل المثلثي. استنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$ . كتابة  $z_1$  على الشكل المثلثي:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ نجد } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\text{إذن } z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة  $z_2$  على الشكل المثلثي:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ نجد } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{إذن } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

لاحظ أن  $\frac{\pi}{12}$  عمدة للعدد  $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

الشكل  $z = re^{i\theta}$ , فقد كتب على الشكل المثلثي.

$$\text{فمثلا: } 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

• وإذا كان  $z = re^{i\theta}$  حيث  $r > 0$  فإن  $|z| = r$  و  $\arg z = \theta + 2k\pi$

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases} \text{ تكافئ } (r_2 > 0 \text{ و } r_1 > 0), r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$$

الانتقال بالعدد المركب من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

مثال (1). ليكن العدد المركب  $z = \sqrt{3} + i$

$$\text{نحسب طويلة } z: |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ نجد } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{نحسب عمدة للعدد } z: \text{ من العلاقتين}$$

$$\text{إذن } z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

مثال (2). ليكن العدد المركب  $(-1+i)^{12}$

لاحظ أنه من الصعوبة بمكان كتابة هذا العدد على الشكل الجبري لوجود الأس الكبير لذا نتعامل مع العدد  $z = -1 + i$  أولاً، فنكتبه على الشكل المثلثي:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \text{ نجد } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{من العلاقتين}$$

$$\text{إذن } z = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

ونكمل الحساب بالطريقة الآتية:

$$\begin{aligned} (-1+i)^{12} &= (z)^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{i\frac{60\pi}{4}} = 64e^{i15\pi} = 64(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) \\ &= 64[\cos(\pi + 14\pi) + i \sin(\pi + 14\pi)] \\ &= 64(\cos \pi + i \sin \pi) = -64 \end{aligned}$$

$$z_6 = i, z_5 = i - 4, z_4 = 3, z_3 = 5 - \frac{i}{2}, z_2 = 1 - i, z_1 = 3 + 4i$$

$$z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_7 = -5$$

اكتب، على الشكل المثلثي، الأعداد الآتية:

$$z_5 = -\sqrt{3} - i, z_4 = 1 - i\sqrt{3}, z_3 = \sqrt{3} + i, z_2 = 1 - i, z_1 = 1 + i$$



(1) حساب طول كل عدد:

$$|z_2| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, |z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|z_3| = \left| 5 - \frac{i}{2} \right| = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{101}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$$

$$(|z| = |x| \text{ فإن } z = x \text{ حيث } x \text{ عدد حقيقي, لأنه إذا كان } z = x \text{ فإن } |z| = |x|)$$

$$|z_4| = |3| = 3$$

$$|z_5| = |i - 4| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$(|z| = |y| \text{ فإن } z = yi \text{ حيث } y \text{ عدد حقيقي, لأنه إذا كان } z = yi \text{ فإن } |z| = |y|)$$

$$|z_6| = |i| = 1, |z_7| = |-5| = 5, |z_8| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|1 + i| = 1, |z_7| = |-5| = 5$$

(2) كتابة الأعداد على الشكل المثلثي:

$$z_1 = 1 + i \text{ العدد}$$

$$|z_1| = |1 + i| = \sqrt{2} \text{ لدينا}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ نجد } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ تكون } \theta \text{ عمدة للعدد } z_1, \text{ من العلاقتين}$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = 1 - i \text{ العدد}$$

$$|z_2| = |1 - i| = \sqrt{2} \text{ لدينا}$$

مثال (4). لنحل المعادلة  $z^3 = 1$

إذا وضعنا  $z = re^{i\theta}$  يكون معنا  $r^3 e^{i3\theta} = 1 e^{i(0)}$  ومنه  $r^3 = 1$  و  $e^{i3\theta} = 1$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \text{ وبالتالي: } \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \text{ ومنه}$$

إذن للمعادلة  $z^3 = 1$  ثلاثة حلول. نحصل عليها بتعويض  $k$  بالأعداد: 0, 1, 2 كما يلي:

$$z_0 = 1 e^{i(0)} = 1, z_1 = 1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = 1 e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

دستور موافق

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \text{ من كل } n \text{ من } \mathbb{Q}$$

ملاحظة: بنشر  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$  ومطابقته بـ  $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$  نحصل

على  $\cos(n\theta)$  و  $\sin(n\theta)$  بدلالة  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$ .

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \text{ فمثلا:}$$

$$\text{وبما أن } (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \text{ فإن}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ و } \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

دستور أولر

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ و } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

ملاحظة: يستعمل لكتابة  $\cos^n \theta$  و  $\sin^n \theta$  على شكل عبارة خطية.

فمثلا، لنكتب  $\cos^2 \theta$  على شكل عبارة خطية:

$$\cos^2 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} + 2}{4} = \frac{2 \cos 2x + 2}{4} = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

تمارين على الشكل المثلثي

التمرين 121

(1) احسب طول كل عدد من الأعداد المركبة الآتية:



نجد  $\theta = -\frac{\pi}{3}$  لتكن  $\theta$  عمدة للعدد  $z_4$ ، من العلاقتين  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$z_4 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$

العدد  $z_5 = -\sqrt{3} - i$

لدينا  $|z_5| = |-\sqrt{3} - i| = 2$

نجد  $\theta = \frac{7\pi}{6}$  لتكن  $\theta$  عمدة للعدد  $z_5$ ، من العلاقتين  $\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$z_5 = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$

التمرين 122

ليكن العددان المركبان:  $z_1 = 2 + 2i$ ،  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ . اكتب كلا من  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل المثلثي. استنتج الشكل المثلثي لكل من الأعداد:

$\frac{(z_1)^2}{z_2}$ ،  $-z_2$ ،  $\overline{z_1}$ ،  $(z_1)^3$ ،  $\frac{z_1}{z_2}$ ،  $z_1 \times z_2$

الحل

كتابة العدد  $z_1 = 2 + 2i$  على الشكل المثلثي:

لدينا  $|z_1| = |2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نجد  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  لتكن  $\theta_1$  عمدة للعدد  $z_1$ ، من العلاقتين  $\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

إذن  $z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$

كتابة العدد  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$  على الشكل المثلثي:

نجد  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  لتكن  $\theta$  عمدة للعدد  $z_2$ ، من العلاقتين  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$

ملاحظة: حصلنا على  $-\frac{\pi}{4}$  وهي عمدة للعدد المركب  $z_2$  بالطريقة الآتية:

نعين أولا  $\alpha$  باستعمال العلاقتين: فنجد  $\alpha = \frac{\pi}{4}$   $\begin{cases} \cos \alpha = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

ثم نعين  $\theta$  بملاحظة إشارتي  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  واستعمال الجدول الآتي:

إذا كان $\cos \theta$	+	-	-	+
وكان $\sin \theta$	+	+	-	-
$\theta =$ فإن	$\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$

فجد  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ . يمكن، أيضا، استعمال الآلة الحاسبة لتعيين  $\theta$ .

العدد  $z_3 = \sqrt{3} + i$

لدينا  $|z_3| = |\sqrt{3} + i| = 2$

نجد  $\theta = \frac{\pi}{6}$  لتكن  $\theta$  عمدة للعدد  $z_3$ ، من العلاقتين  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$

$z_3 = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$

العدد  $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

لدينا  $|z_4| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$

كتابة العدد  $z_1$  على الشكل المثلثي لدينا  $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

( لأنه إذا كان  $z = re^{i\theta}$  فإن  $\bar{z} = re^{-i\theta}$  )

كتابة العدد  $-z_2$  على الشكل المثلثي: لدينا  $-z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

( لأنه إذا كان  $z = re^{i\theta}$  فإن  $-z = re^{i(\theta+\pi)}$  )

كتابة العدد  $\frac{(z_1)^2}{z_2}$  على الشكل المثلثي:

$$\left| \frac{(z_1)^2}{z_2} \right| = \frac{|(z_1)^2|}{|z_2|} = \frac{2|z_1|}{|z_2|} = 2 \frac{|z_1|}{|z_2|} = 2\sqrt{2}$$

لنكن  $\theta$  عمدة للعدد  $\frac{(z_1)^2}{z_2}$  ، لدينا  $\theta = 2\theta_1 - (-\theta_2) = 2\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$$\frac{(z_1)^2}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ إذن}$$

### التمرين 123

لنكن الأعداد المركبة:  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ،  $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$  ،  $Z = \frac{z_1}{z_2}$

(1) اكتب  $Z$  على الشكل المثلثي .

(2) اكتب كلا من العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الجبري .

استنتج الشكل الجبري للعدد  $Z$  .

(3) استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

### الحل

(1) كتابة  $Z$  على الشكل المثلثي :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

(2) كتابة كل من العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الجبري

• لدينا  $|z_2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$

$$\text{لنكن } \theta_2 \text{ عمدة للعدد } z_2 \text{ , من العلاقتين } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ نجد } \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

• إذن  $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

كتابة العدد  $z_1 \times z_2$  على الشكل المثلثي:

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

• لنكن  $\theta$  عمدة للعدد  $z_1 \times z_2$  ، لدينا  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

( لأن  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$  )

• إذن  $z_1 \times z_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

كتابة العدد  $\frac{z_1}{z_2}$  على الشكل المثلثي:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

• لنكن  $\theta$  عمدة للعدد  $\frac{z_1}{z_2}$  ،  $\theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$

( لأن  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$  )

• إذن  $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

كتابة العدد  $(z_1)^3$  على الشكل المثلثي:

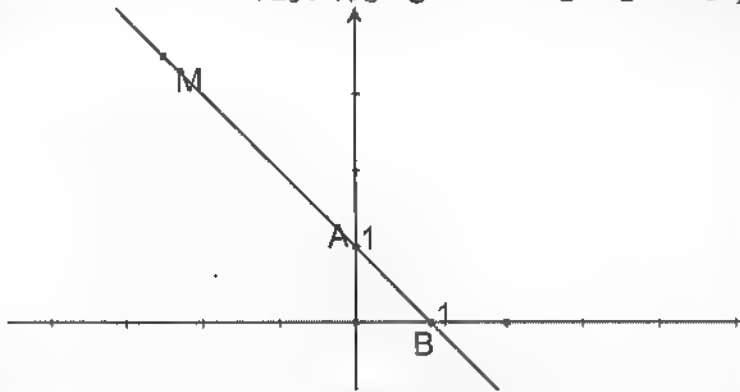
$$|(z_1)^3| = |z_1|^3 = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$$

• لنكن  $\theta$  عمدة للعدد  $(z_1)^3$  ، لدينا  $\theta = 3\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$  ( لأن  $\arg(z^n) = n \arg z$  )

• إذن  $(z_1)^3 = 16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

إذا وفقط إذا كان  $M = A$  أو  $(\overline{MB}, \overline{MA}) = k\pi$

حيث  $A, B$  النقطتان اللتان لاحقتهما على الترتيب  $i$  و  $2$ .



إذن مجموعة النقط  $E$  هي المستقيم  $(AB)$  باستثناء النقط  $B$ .

• لاحقة الشعاع  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  هي العدد المركب  $z_{\vec{u}} = x + iy$ .

• لاحقة  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  هي  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .

• لاحقة  $G$  مرجع النقط  $A, B, C$ , المرفقة بالمعاملات  $a, b, c$  (على الترتيب)

هي  $z_G = \frac{aZ_A + bZ_B + cZ_C}{a+b+c}$  مع  $a+b+c \neq 0$ .

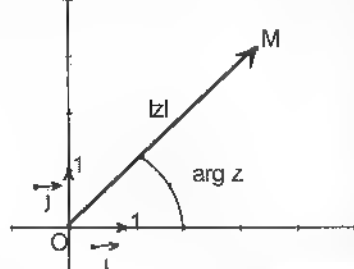
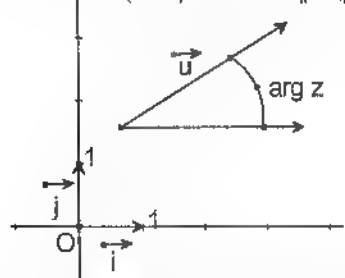
حالة خاصة: لاحقة مركز ثقل المثلث  $ABC$  هي:  $\frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$ .

• لاحقة الشعاع  $\vec{u}(x, y)$  هي:  $z_{\vec{u}} = x + iy$ .

•  $Z_{k\vec{u}} = kZ_{\vec{u}}$ ,  $Z_{\vec{u} + \vec{v}} = Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}}$ ,  $Z_{\overline{AB}} = Z_B - Z_A$ .

• إذا كان  $z (z \neq 0)$  لاحقة النقط  $M$  فإن  $|z| = OM$  و  $\arg z = (\vec{i}, \overline{OM})$ .

• إذا كان  $z (z \neq 0)$  لاحقة الشعاع  $\vec{u}$  فإن  $|z| = \|\vec{u}\|$  و  $\arg z = (\vec{i}, \vec{u})$ .



لدينا

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

استنتاج الشكل الجبري للعدد  $Z$  لدينا

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

(3) استنتاج القيمتين المصبوطتين لكل من  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

الأعداد المركبة والهندسة

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

• لاحقة النقط  $M(x, y)$  هي العدد المركب  $z_M = x + iy$ .

فمثلا، لنعين  $E$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، بحيث يكون العدد المركب:

$$(2-i)z + 3 - 4i$$

نضع  $z = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

(1) لنكتب  $(2-i)z + 3 - 4i$  على الشكل الجبري:

$$(2-i)z + 3 - 4i = 2x + y + 3 + i(-x + 2y - 4)$$

(2) يكون العدد  $(2-i)z + 3 - 4i$  تخيليا صفرًا إذا وفقط إذا كان  $2x + y + 3 = 0$

$$y = -2x - 3$$

(3) إذن مجموعة النقط  $E$  هي المستقيم ذو المعادلة  $y = -2x - 3$ .

ومثلا، لنعين  $E$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، بحيث يكون العدد المركب:

$$\frac{z-i}{z-2}$$

يكون العدد  $\frac{z-i}{z-2}$  حقيقيا إذا وفقط إذا كان  $z = i$  أو  $z = 2$  أو  $\arg \left( \frac{z-i}{z-2} \right) = k\pi$

	منصف القطعة $[AB]$	$MA = MB$
	المستقيم (AB) باستثناء A و B	$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi k$
	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$	$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2\pi k$
	الدائرة التي قطرها (AB) باستثناء النقطتين A و B	$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$
	نصف الدائرة التي قطرها (AB) باستثناء النقطتين A و B وبحيث يكون MAB مباشرا	$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
	نصف الدائرة التي قطرها (AB) باستثناء النقطتين A و B وبحيث يكون MAB غير مباشر	$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
	الدائرة التي قطرها (AB)	$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

•  $A \neq B$  مع  $(i, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$  ,  $AB = |z_B - z_A|$

•  $C \neq D$  و  $A \neq B$  مع  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_{CD}}{z_{AB}}\right)$

نتائج :

•  $(AB) \parallel (CD)$  يكافئ  $\arg\left(\frac{z_{CD}}{z_{AB}}\right) = 0 + 2k\pi$  أو  $\arg\left(\frac{z_{CD}}{z_{AB}}\right) = \pi + 2k\pi$

ويكافئ  $\frac{z_{CD}}{z_{AB}}$  حقيقي , مع  $A \neq B$  و  $C \neq D$

•  $(AB) \perp (CD)$  يكافئ  $\arg\left(\frac{z_{CD}}{z_{AB}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  أو  $\arg\left(\frac{z_{CD}}{z_{AB}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ويكافئ  $\frac{z_{CD}}{z_{AB}}$  تخيلي صرف , مع  $A \neq B$  و  $C \neq D$

• النقط  $A, B, C$  على استقامة واحدة يكافئ

$\arg\left(\frac{z_{AC}}{z_{AB}}\right) = 0 + 2k\pi$  أو  $\arg\left(\frac{z_{AC}}{z_{AB}}\right) = \pi + 2k\pi$

• مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث  $|z - z_A| = r$  مع  $(r > 0)$  هي الدائرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها  $r$ .

• مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث  $|z - z_A| = |z - z_B|$  مع  $(z_A \neq z_B)$  هي منصف القطعة  $[AB]$ .

طبيعة بعض مجموعات النقط :

لتكن النقطتان المختلفتان  $A$  و  $B$  من المستوي.

الرسم	هي :	مجموعة النقط $M$ بحيث
	• الدائرة التي مركزها $A$ ونصف قطرها $k$ , إذا كان $k > 0$ . • مجموعة خالية, إذا كان $k < 0$ . • النقطة $A$ , إذا كان $k = 0$ .	$MA = k$

التمرين 124

في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $a = 2 - 3i$  والنقطة  $B$  ذات اللاحقة  $b = 5 - i$ .  
احسب المسافات  $OA$ ،  $OB$ ،  $AB$ . ثم استنتج طبيعة المثلث  $OAB$ .

الحل

حساب المسافة  $OA$ :  $OA = |z_A - z_O| = |2 - 3i| = \sqrt{13}$   
حساب المسافة  $OB$ :  $OB = |z_B - z_O| = |5 - i| = \sqrt{26}$   
حساب المسافة  $AB$ :  $AB = |z_B - z_A| = |3 + 2i| = \sqrt{13}$   
بما أن  $OA = AB$  و  $OA^2 + AB^2 = OB^2$  فإن المثلث  $OAB$  قائم في  $A$  ومتساوي الساقين.

التمرين 125

في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  في كل حالة من الحالات الآتية

$$(1) |z - 2| = |z - i|$$

$$(2) |z - 3i| = 2$$

$$(3) |z - 2| = |2z + i|$$

الحل

(1) نضع  $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$  حيث  $A$  و  $B$  نقطتان من المستوى لاحتقائهما، على الترتيب،  $2$ ،  $i$ . إذن  $AM = BM$ .  
مجموعة النقط، هي منتصف القطعة  $[AB]$ .

(2) نضع  $|z_M - z_C| = 2$  حيث  $C$  نقطة من المستوى لاحتقتها  $3i$ . إذن  $CM = 2$ .  
مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها  $C$  ونصف قطرها  $2$ .

(3) لدينا  $|z_M - z_A| = 2|z_M - z_B|$  ومنه  $|z - 2| = |2z + i| = 2\left|z + \frac{1}{2}i\right|$   
حيث  $A$  و  $B$  نقطتان من المستوى

لاحتقائهما، على الترتيب،  $2$ ،  $-\frac{i}{2}$ . إذن  $AM = 2BM$ .

من أجل تعيين مجموعة النقط  $M$  في هذه الحالة نسلك الطريقة الآتية:

$$\text{لدينا } MA = 2MB \text{ تكافئ } MA^2 = 4MB^2$$

$$\text{تكافئ } \overline{MA}^2 = 4\overline{MB}^2$$

$$\text{ونكافئ } (\overline{MA} - 2\overline{MB})(\overline{MA} + 2\overline{MB}) = 0$$

لندخل  $G_1$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين، على الترتيب، بالمعاملين  $1$  و  $-2$ .

وندخل  $G_2$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين، على الترتيب، بالمعاملين  $1$  و  $2$ .

$$\text{إذن } 3\overline{MG}_1 \cdot 3\overline{MG}_2 = 0 \text{ أي أن } (1 - (-2))\overline{MG}_1 \cdot (1 + 2)\overline{MG}_2 = 0$$

$$\text{ومنه } \overline{MG}_1 \cdot \overline{MG}_2 = 0 \text{ وبالتالي } \overline{MG}_1 \perp \overline{MG}_2$$

إذن مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها  $[G_1G_2]$ .

التمرين 126

في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطة  $A$  ذات

$$\text{اللاحقة } a = 5 + 3i \text{ والنقطة } B \text{ ذات اللاحقة } b = 5 - 8i$$

هل المثلث  $OAB$  قائم في  $O$ ؟

الحل

$$\text{نعلم أن } (\overline{OA}, \overline{OB}) = \arg\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{لدينا } \frac{b}{a} = \frac{5 - 8i}{5 + 3i} \times \frac{5 - 3i}{5 - 3i} = \frac{1 - 55i}{34}$$

$$\text{وبما أن } \frac{b}{a} \neq iy \text{ حيث } y \text{ عدد حقيقي غير معدوم، فإن } \arg\left(\frac{b}{a}\right) \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

إذن المثلث  $OAB$  ليس قائما في  $O$ .

التمرين 127

في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . الأسئلة مستقلة عن بعضها البعض

1) احسب طولية كل عدد من الأعداد المركبة الآتية:  $(7+35i)(3+2i)$  ،  $\frac{7-35i}{3-2i}$

$$\frac{(5-3i)(1+i)}{4+i}$$

(2) عين كل النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث  $z \cdot \bar{z} = 4$ .

(3) لتكن النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $2+3i$ .

عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، بحيث:  $|z - (2+3i)| = 5$ .

(4) ليكن  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . احسب  $|j|$ . برهن أن  $j^2 = \bar{j}$ . استنتج أن  $j^3 = 1$ .



$$(1) \quad |(7+35i)(3+2i)| = |7+35i| \times |3+2i| = \sqrt{1274} \times \sqrt{13} = \sqrt{13 \times 49 \times 2} \times \sqrt{13} = \sqrt{13} \times 7 \times \sqrt{2} \times \sqrt{13} = 91\sqrt{2}$$

$$\left| \frac{7-35i}{3-2i} \right| = \frac{|7-35i|}{|3-2i|} = \frac{\sqrt{1274}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{1274}{13}} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\left| \frac{(5-3i)(1+i)}{4+i} \right| = \frac{|(5-3i)(1+i)|}{|4+i|} = \frac{|5-3i| |1+i|}{|4+i|} = \frac{\sqrt{34} \times \sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{17}} = 2$$

(2) نضع  $z = x + iy$ .

الشرط  $z \cdot \bar{z} = 4$  يكافئ  $x^2 + y^2 = 4$  (لأن  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ )

إذن مجموعة النقط  $M$  هي الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 2.

(3) الشرط  $|z - (2+3i)| = 5$  يكافئ  $|z_M - z_A| = 5$

ويكافئ  $AM = 5$

إذن مجموعة النقط  $M$  هي الدائرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها 5.

$$(4) \quad |j| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$j^2 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$$

لدينا  $j^3 = j^2 \times j = \bar{j} \times j = |j|^2 = 1$  (لأن  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ )

التمرين 128

$ABC$  مثلث في الاتجاه المباشر.

أنشئ النقط  $P$  و  $Q$  و  $R$ ، بحيث:

$$\begin{cases} CR = AB \\ (\overline{AB}, \overline{CR}) = \frac{\pi}{2} \dots (3) \end{cases}, \begin{cases} BQ = CA \\ (\overline{CA}, \overline{BQ}) = \frac{\pi}{2} \dots (2) \end{cases}, \begin{cases} AP = BC \\ (\overline{BC}, \overline{AP}) = \frac{\pi}{2} \dots (1) \end{cases}$$

برهن أن للمثلثين  $ABC$  و  $PQR$  نفس مركز الثقل.



لتكن الأعداد:  $r, q, p, c, b, a$ ، على الترتيب،

لواحق النقط:  $R, Q, P, C, B, A$ .

لدينا (1) يكافئ  $p - a = i(c - b)$

(2) يكافئ  $q - b = i(a - c)$

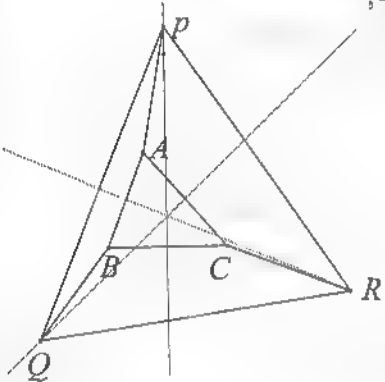
(3) يكافئ  $r - c = i(b - a)$

بجمع المساويات طرفاً إلى طرف نجد:

$$p + q + r = a + b + c$$

$$\frac{p+q+r}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

إذن للمثلثين  $ABC$  و  $PQR$  نفس مركز الثقل.



التمرين 129

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $C, B, A$ :

التي لواحقها على الترتيب  $a = 1$ ،  $b = 1 + 2i$ ،  $c = 1 + \sqrt{3} + i$ .

اكتب العدد  $\frac{c-a}{b-a}$  على الشكل المثلثي. استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .



كتابة العدد  $\frac{c-a}{b-a}$  على الشكل المثلثي

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+\sqrt{3}+i-1}{1+2i-1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ و } \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \text{ إذن}$$

$$AC = AB \text{ ومنه } \frac{AC}{AB} = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1$$

لدينا

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

ولدينا

استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$  المثلث  $ABC$  متساوي الساقين ( لأن  $AC = AB$  )

التمرين 130

$$u = \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} \text{ نضع : } \text{ليكن } z \text{ عددا مركبا يختلف عن } -i.$$

$$1. \text{ بين أن } |u| = |z|.$$

$$2. \text{ عين } A \text{ مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث يكون } u \text{ تخيليا صرفا.}$$

$$1. |u| = |z|$$

$$\text{لدينا } u = \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} \text{ ومنه } |u| = \left| \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} \right| = \frac{|z| |\bar{z}-i|}{|z+i|}$$

$$\text{وبما أن } \bar{z}-i = \overline{z+i} \text{ فإن } |\bar{z}-i| = |z+i|$$

$$\text{إذن } |u| = |z|$$

2. تعيين  $A$  مجموعة النقط  $M(z)$

ليكن  $z$  عددا مركبا يختلف عن  $-i$  : إن  $M(z) \in A$  تكافئ  $u \in i\mathbb{R}$

$$\text{أي أن } u = -\bar{u} \text{ ، لكن } u = -\bar{u} \text{ تكافئ } \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} = -\frac{\bar{z}(z+i)}{z-i}$$

$$\text{وتكافئ } z(\bar{z}-i)^2 + \bar{z}(z+i)^2 = 0$$

$$\text{وتكافئ } z\bar{z}^2 - z + z^2\bar{z} - \bar{z} = 0$$

$$\text{وتكافئ } z\bar{z}(z+\bar{z}) - (z+\bar{z}) = 0$$

$$\text{وتكافئ } (z+\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0$$

$$\text{وتكافئ } (z\bar{z}-1=0 \text{ أو } z+\bar{z}=0)$$

نضع  $z = x + iy$  حيث  $(x, y) \neq B(0, -1)$  ومنه

$$M(z) \in A \text{ تكافئ } (x^2 + y^2 = 1 \text{ أو } x + y = 0)$$

لتكن  $(C)$  الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1.

وليكن المستقيم  $(D): x + y = 0$ .

$$\text{إذن المجموعة } A = [(C) \cup (D)] - \{B\}$$

المعادلات من الدرجة الثانية

I المعادلات من الشكل :  $z^2 = a$  ، حيث  $a$  عدد حقيقي.

• إذا كان  $a \geq 0$  فإن للمعادلة حلان حقيقيان هما :  $z_1 = -\sqrt{a}$  و  $z_2 = \sqrt{a}$ .

• إذا كان  $a < 0$  فإن للمعادلة حلان تخيليان صرفان ومترافقان هما :  $z_1 = i\sqrt{-a}$  و  $z_2 = -i\sqrt{-a}$ .

$$z_2 = i\sqrt{-a} \text{ و } z_1 = -i\sqrt{-a}$$

أمثلة : حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات الآتية :

$$z + \frac{1}{z} = 0, z^2 = \cos^2 \theta - 1, z^2 + \frac{3}{4} = 0, z^2 = -3$$

لنحل المعادلة  $z^2 = -3$  في  $\mathbb{C}$  :

$$\text{نضع } z^2 = (-1)(3) = (i^2)(3) = 3i^2 \text{ (لأن } i^2 = -1 \text{)}$$

$$\text{ومنه الحلان هما : } z_1 = -i\sqrt{3} \text{ ، } z_2 = i\sqrt{3}$$

II المعادلات من الشكل :  $az^2 + bz + c = 0$  ، حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية مع  $a \neq 0$ .

$$\text{• إذا كان } \Delta \geq 0 \text{ فإن للمعادلة حلان حقيقيان هما : } z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ، } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• إذا كان  $\Delta > 0$  فإن للمعادلة حلان مركبان مترافقان.

ملاحظة : في  $\mathbb{C}$  يمكننا دائما الحصول على التحليل الآتي :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \text{ حيث } z_1 \text{ و } z_2 \text{ جذرا كثير الحدود}$$

$$az^2 + bz + c$$

أمثلة : حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات الآتية :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0, z^2 - 2z + 2 = 0, 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$

لنحل المعادلة  $2z^2 - 3z + 4 = 0$  في  $\mathbb{C}$  :

ليكن المميز  $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(4) = -23$  أي أن  $\Delta = 23i^2$  (لأن  $i^2 = -1$ )

إذن حلا المعادلة هما :

$$z_1 = \frac{-(-3) - i\sqrt{23}}{2(2)} = \frac{3 - i\sqrt{23}}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$$

$$z_2 = \frac{-(-3) + i\sqrt{23}}{2(2)} = \frac{3 + i\sqrt{23}}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i$$

(III) المعادلات من الشكل :  $z^2 = z_0$  حيث  $z_0$  عدد مركب معطى .

1. العدد المعطى  $z_0$  مكتوب على الشكل الجبري .

فمثلا : حل في  $\mathbb{C}$  ، المعادلة :  $z^2 = 3 + 4i$  . نضع  $z = x + iy$

إذن  $(x + iy)^2 = 3 + 4i$  ومنه  $x^2 + 2xyi - y^2 = 3 + 4i$  (1)...

وبما أن  $z^2 = 3 + 4i$  فإن  $|z^2| = |3 + 4i| = 5$  وبالتالي  $|z|^2 = 5$  (لأن  $|z^2| = |z|^2$ )

لكن  $|z|^2 = 5$  تكافئ  $x^2 + y^2 = 5$  (2)...

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

من (1) و (2) نجد الجملة :

تعطي المعادلتان الأولى والثانية :  $x^2 = 4$  و  $y^2 = 1$

وبتطبيق الشرط الثالث  $xy = 2$  ، نلاحظ أن للعددين الحقيقيين  $x$  و  $y$  نفس الإشارة

إذن حلا المعادلة هما :  $z_1 = 2 + i$  ،  $z_2 = -2 - i$  .

2. العدد المعطى  $z_0$  مكتوب على الشكل المثلثي .

نضع  $z^2 = re^{i\theta}$  ، حيث  $\theta$  عمدة للعدد المركب  $z_0$  و  $r$  طولته .

الحلان هما  $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  و  $z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

فمثلا : حل في  $\mathbb{C}$  ، المعادلة :  $z^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  .

حلا المعادلة هما  $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$  و  $z_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$  .

(IV) المعادلات من الشكل :  $az^2 + bz + c = 0$  ، حيث  $a, b, c$  أعداد مركبة مع  $a \neq 0$  .

فمثلا : حل في  $\mathbb{C}$  ، المعادلة :  $(1+i)z^2 + iz - 1 = 0$  .

لنحسب المميز  $\Delta$  :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (i)^2 - 4(1+i)(-1) = -1 + 4(1+i) = 3 + 4i$$

لنبحث عن عدد مركب  $\delta$  بحيث  $\delta^2 = 3 + 4i$  (  $\delta$  هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$  ) وحسب المثال السابق ،  $\delta = 2 + i$  .

إذن حلا المعادلة هما :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-i - (2+i)}{2(1+i)} = \frac{-2-2i}{2(1+i)} = -1$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-i + (2+i)}{2(1+i)} = \frac{2}{2(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

ومثلا : حل في  $\mathbb{C}$  ، المعادلة :  $z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$  .

لنحسب المميز  $\Delta$  :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{3} - 3i)^2 - 4(1)(-2 - 2\sqrt{3}i) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

لنبحث عن عدد مركب  $\delta$  بحيث  $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$  (  $\delta$  هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$  )

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 4 \dots (2) \\ 2xy = 2\sqrt{3} \dots (3) \end{cases}$$

نضع  $\delta = x + iy$  ومنه الجملة

وبجمع (1) و (2) نجد  $2x^2 = 6$  وهذا يكافئ (  $x = \sqrt{3}$  أو  $x = -\sqrt{3}$  )

ومن أجل  $x = \sqrt{3}$  وباستعمال (3) نجد  $y = 1$  . إذن  $\delta = \sqrt{3} + i$

إذن حلا المعادلة هما :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{\sqrt{3} - 3i - (\sqrt{3} + i)}{2} = -2i$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{\sqrt{3} - 3i + (\sqrt{3} + i)}{2} = \sqrt{3} - i$$



التمرين 131

حل في  $\mathbb{C}$ , المعادلات الآتية :

$$z^2 - \sqrt{3}z - i = 0, \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0, \quad z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0, \quad z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$$

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0, \quad z^4 + 10z^2 + 169 = 0, \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0$$

الحل

$$z^2 + z + 1 = 0$$

لنحسب المميز  $\Delta$  :  $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$  أي أن  $\Delta = 3i^2$

$$z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إذن الحلان هما :

$$z_2 = \frac{-(-1) + i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$$

لنحسب المميز  $\Delta$  :  $\Delta = b^2 - 4ac = (1+2i)^2 - 4(1)(i-1) = 1$

$$z_1 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i, \quad z_2 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

$$z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$$

لنحسب المميز  $\Delta$  :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{3})^2 - 4(1)(-i) = 3+4i$

لنبحث عن عدد مركب  $\delta$  بحيث  $\delta^2 = 3+4i$  ( $\delta$  هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$ )

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & \dots(1) \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots(2) \end{cases}$$

نضع  $\delta = x + iy$ , لتكن الجملة :  $2xy = 4 \dots(3)$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد  $2x^2 = 8$  ومنه  $x^2 = 4$  وبالتالي  $x = 2$  أو  $x = -2$ .  
من أجل  $x = 2$  وبالتعويض في (3) نجد :  $y = 1$ .

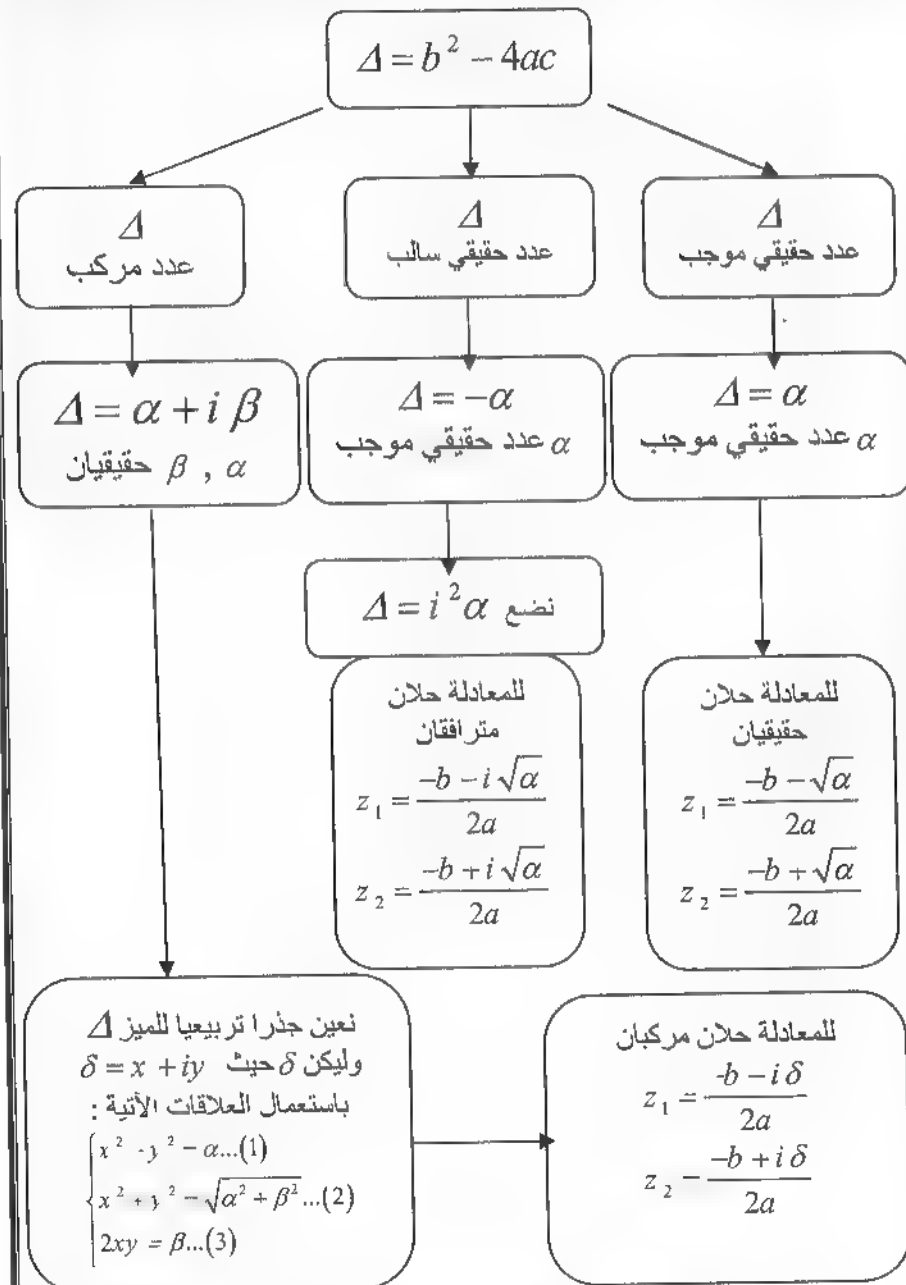
إذن  $\delta = 2+i$  ومنه حلا المعادلة هما :

$$z_1 = \frac{-(-\sqrt{3}) - (2+i)}{2(1)} = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}-2}{2} - \frac{1}{2}i$$

مخطط حل المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  في  $\mathbb{C}$  :

حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية أو أعداد مركبة.

نحسب المميز  $\Delta$  حيث  $\Delta = b^2 - 4ac$  ثم نتابع حسب المخطط الآتي :



$$Z_2 = \frac{-10+24i}{2(1)} = -5+12i, Z_1 = \frac{-10-24i}{2(1)} =$$

• من أجل  $Z = -5-12i$  لدينا  $z^2 = -5-12i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 13 \dots (2) \\ 2xy = -12 \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد :  $2x^2 = 8$  ومنه  $x^2 = 4$  وبالتالي :  $x = 2$  أو  $x = -2$   
ومن أجل  $x = -2$  نجد :  $y = 3$  ، ومن أجل  $x = 2$  نجد :  $y = -3$

إذن للمعادلة  $z^2 = -5-12i$  حلان هما :  $z_1 = -2+3i$  ،  $z_2 = 2-3i$  .

• من أجل  $Z = -5+12i$  لدينا  $z^2 = -5+12i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 13 \dots (2) \\ 2xy = 12 \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد :  $2x^2 = 8$  ومنه  $x^2 = 4$  وبالتالي :  $x = 2$  أو  $x = -2$   
ومن أجل  $x = -2$  نجد :  $y = -3$  ، ومن أجل  $x = 2$  نجد :  $y = 3$

إذن للمعادلة  $z^2 = -5+12i$  حلان هما :  $z_1 = -2-3i$  ،  $z_2 = 2+3i$  .

الخلاصة : للمعادلة  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$  أربعة حلول هي :

$$z_1 = -2+3i, z_2 = 2-3i, z_3 = -2-3i, z_4 = 2+3i$$

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0$$

$$\begin{cases} Z = z^2 \\ Z^2 - 30Z + 289 = 0 \end{cases}$$

نضع  $Z = z^2$  ، المعادلة  $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$  تكافئ

لنحل ، الآن ، المعادلة  $Z^2 - 30Z + 289 = 0$  :

$$\Delta = (16)^2 i^2 : \Delta = (-30)^2 - 4(1)(289) = -256$$

إذن الحلان هما :

$$Z_2 = \frac{30+16i}{2(1)} = 15+8i, Z = \frac{30-16i}{2(1)} = 15-8i$$

• من أجل  $Z = 15-8i$  لدينا  $z^2 = 15-8i$

$$z_2 = \frac{(-\sqrt{3}) + (2+i)}{2(1)} = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$$

لنحسب المميز  $\Delta$  :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5-14i)^2 - 4(1)(-10i-24) = -75-100i = -25(3+4i)$$

باستعمال السؤال السابق نجد :  $\Delta = [5i(2+i)]^2$  لأن  $(2+i)^2 = 3+4i$

$$z_1 = \frac{-(5-14i) - 5i(2+i)}{2(1)} = 2i$$

إذن الحلان هما :

$$z_2 = \frac{-(5-14i) + 5i(2+i)}{2(1)} = -5+12i$$

$$z^2 - (3+4i)z - 1+5i = 0$$

لنحسب المميز  $\Delta$  :  $\Delta = b^2 - 4ac = (3+4i)^2 - 4(1)(-1+5i) = -3+4i$

لنبحث عن عدد مركب  $\delta$  بحيث  $\delta^2 = -3+4i$  هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 5 \dots (2) \\ 2xy = 4 \dots (3) \end{cases}$$

نضع  $\delta = x + iy$  ، لتكن الجملة :

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد  $2x^2 = 2$  ومنه  $x^2 = 1$  وبالتالي  $x = 1$  أو  $x = -1$

من أجل  $x = 1$  وبالتعويض في (3) نجد :  $y = 2$  .

إذن  $\delta = 1+2i$  ومنه حلا المعادلة هما :

$$z_2 = \frac{3+4i + (1+2i)}{2(1)} = 2+3i, z_1 = \frac{3+4i - (1+2i)}{2(1)} = 1+i$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0$$

$$\begin{cases} Z = z^2 \\ Z^2 + 10Z + 169 = 0 \end{cases}$$

نضع  $Z = z^2$  ، المعادلة  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$  تكافئ

لنحل ، الآن ، المعادلة  $Z^2 + 10Z + 169 = 0$  :

$$\Delta = (10)^2 - 4(1)(169) = -576$$

إذن الحلان هما :

$$x^2 - y^2 = 15 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 17 \dots (2) \text{ نضع } z = x + yi \text{ ومنه لتكن الجملة :}$$

$$2xy = -8 \dots (3)$$

بجمع (1) و (2) نجد :  $2x^2 = 32$  ومنه  $x^2 = 16$  وبالتالي :  $x = 4$  أو  $x = -4$  )  
ومن أجل  $x = -4$  نجد :  $y = 1$  , ومن أجل  $x = 4$  نجد :  $y = -1$

إذن للمعادلة  $z^2 = 15 - 8i$  حلان هما :  $z_1 = -4 + i$  ,  $z_2 = 4 - i$  .  
• من أجل  $Z = 15 + 8i$  لدينا  $z^2 = 15 + 8i$

$$x^2 - y^2 = 15 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 17 \dots (2) \text{ نضع } z = x + yi \text{ ومنه لتكن الجملة :}$$

$$2xy = 8 \dots (3)$$

بجمع (1) و (2) نجد :  $2x^2 = 32$  ومنه  $x^2 = 16$  وبالتالي :  $x = 4$  أو  $x = -4$  )  
ومن أجل  $x = -4$  نجد :  $y = -1$  , ومن أجل  $x = 4$  نجد :  $y = 1$

إذن للمعادلة  $z^2 = 15 + 8i$  حلان هما :  $z_1 = -4 + i$  ,  $z_2 = 4 - i$  .  
الخلاصة : للمعادلة  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$  أربعة حلول هي :

$$z_1 = -4 + i , z_2 = 4 - i , z_3 = -4 - i , z_4 = 4 + i$$

### الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

$M$  و  $M'$  و  $\Omega$  نقط لواحقها , على الترتيب ,  $z$  و  $z'$  و  $\omega$  .

• نقول عن النقطة  $M'$  إنها صورة  $M$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{u}$  ذو اللاحقة  $b$  إذا وفقط

$$z' = z + b$$

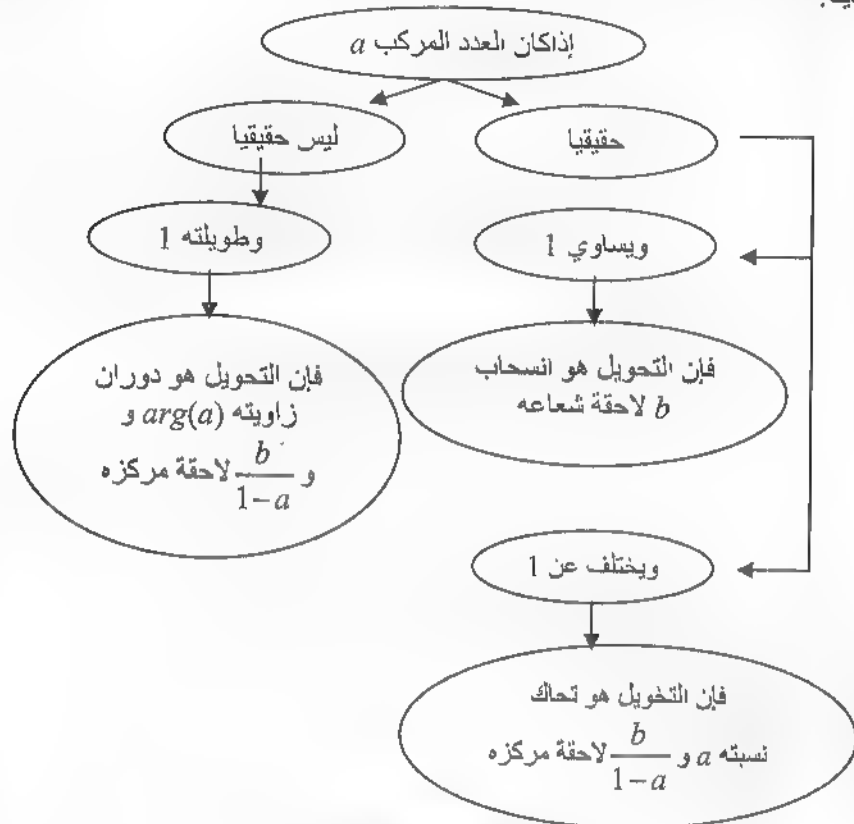
• نقول عن النقطة  $M'$  إنها صورة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\theta$  إذا وفقط إذا

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

• نقول عن النقطة  $M'$  إنها صورة  $M$  بالتحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته  $k$  إذا وفقط إذا

$$z' - \omega = k (z - \omega)$$

ملاحظة : يمكن كتابة عبارة  $z'$  على الشكل  $z' = az + b$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان مركبان ولدينا :



في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  , نعتبر :

الانسحاب  $t$  الذي شعاعه  $\vec{w}$  , ذو اللاحقة  $\omega = 2 + i$  .

والتحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  , ذو اللاحقة  $a = 2 + 4i$  , والذي نسبته  $-\frac{3}{2}$  .

والدوران  $r$  الذي مركزه  $B$  , ذو اللاحقة  $b = 1 - i$  , وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  .

لتكن النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  .

(1) لتكن النقطة  $M_1$  , ذات اللاحقة  $z_1$  , صورة  $M$  بالانسحاب  $t$  .

$$z_3 = i(z - b) + b - i(z - 1 + i) + 1 - i - iz - 2i$$

ومنه

$$(4) \text{ إن لائحة النقطة } O \text{ هي } z_0 = 0$$

$$\text{لائحة صورة } O \text{ بالانسحاب } t \text{ هي : } z_0 + \omega = 0 + 2 + i = 2 + i$$

$$\text{لائحة صورة } O \text{ بالتحاكي } h \text{ هي : } -\frac{3}{2}z_0 + 5 + 10i = 5 + 10i$$

$$\text{لائحة صورة } O \text{ بالدوران } r \text{ هي : } iz_0 - 2i = -2i$$

التمرين 133

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، تعرف على التحويل النقطي

الذي يرفق بالنقطة  $M$  ذات اللائحة  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات اللائحة  $z'$ .

$$z' - i = 2(z - i), z' = -z, z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z, z' = z - 3 + 2i$$

$$z' + 1 = iz + i, z' = -iz$$

الحل

بما أن  $z' = z - 3 + 2i$ ، فإن التحويل هو انسحاب لائحة شعاعه  $-3 + 2i$ .

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z \text{ (الانتقال من الجبري إلى المثلثي) } \text{ بما أن } z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$$

$$\text{فإن } z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0) \text{ وبالتالي التحويل هو دوران زاويته } \frac{\pi}{4} \text{ ومركزه } O.$$

$$z' = -z \text{ أي أن } z' - 0 = -(z - 0) \text{ وبالتالي التحويل هو تحاك نسبته } -1 \text{ ومركزه } O.$$

$$z' - i = 2(z - i) \text{ هو تحاك نسبته } 2 \text{ ولائحة مركزه } i.$$

$$z' = iz \text{ أي أن } z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 0) \text{ وبالتالي التحويل هو دوران زاويته } \frac{\pi}{2} \text{ ومركزه } O.$$

$$z' + 1 = i(z + 1) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 1) \text{ أي أن } z' + 1 = iz + i$$

أعط لائحة الشعاع  $MM_1$ ، ثم استنتج عبارة  $z_1$  بدلالة  $z$ .

(2) لتكن النقطة  $M_2$  ذات اللائحة  $z_2$ ، صورة  $M$  بالتحاكي  $h$ .

اكتب الشعاع  $AM_2$  بدلالة الشعاع  $AM$ ، ثم استنتج عبارة  $z_2$  بدلالة  $z$ .

(3) لتكن النقطة  $M_3$  ذات اللائحة  $z_3$ ، صورة  $M$  بالدوران  $r$ .

عين  $\frac{BM_3}{BM}$  و  $(\overline{BM}, \overline{BM_3})$ ، ثم استنتج طولية العدد  $\frac{z_3 - b}{z - b}$  وعمدة له، ثم استنتج

عبارة  $z_3$  بدلالة  $z$ .

(4) استعمل النتائج السابقة لإيجاد لوائح صور النقطة  $O$  بالانسحاب  $t$  وبالتحاكي  $h$  والدوران  $r$ .

الحل

(1) بما أن  $M_1$  صورة  $M$  بالانسحاب  $t$  فإن  $\overline{MM_1} = \overline{\omega}$  وبالتالي لائحة الشعاع  $MM_1$

هي لائحة الشعاع  $\overline{\omega}$  وبالتالي لائحة  $MM_1$  هي  $\omega = 2 + i$ .

وبما أن لائحة  $M_1$  هي  $z_1$  ولائحة  $M$  هي  $z$  فإن  $z_1 = z + \omega$ .

(2) بما أن  $M_2$  صورة  $M$  بالتحاكي  $h$  فإن  $\overline{AM_2} = -\frac{3}{2}\overline{AM}$  وبالتالي

$$z_2 - a = -\frac{3}{2}(z - a) \text{ أي أن } z_2 - a = -\frac{3}{2}(z - a) \text{ ومنه } z_2 = -\frac{3}{2}z + \frac{5}{2}a$$

$$z_2 = -\frac{3}{2}z + \frac{5}{2}(2 + 4i) = -\frac{3}{2}z + 5 + 10i$$

$$(3) \text{ بما أن } M_3 \text{ صورة } M \text{ بالدوران } r \text{ فإن } \begin{cases} BM_3 = BM \\ (\overline{BM}, \overline{BM_3}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي } \begin{cases} \frac{BM_3}{BM} = 1 \\ (\overline{BM}, \overline{BM_3}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

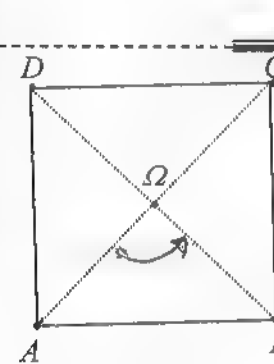
بما أن  $\frac{BM_3}{BM} = 1$  فإن طولية العدد  $\frac{z_3 - b}{z - b}$  هي 1.

$$\text{وبما أن } (\overline{BM}, \overline{BM_3}) = \frac{\pi}{3} \text{ فإن } \arg\left(\frac{z_3 - b}{z - b}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ وإذن } \frac{z_3 - b}{z - b} = e^{i\frac{\pi}{3}} = i$$

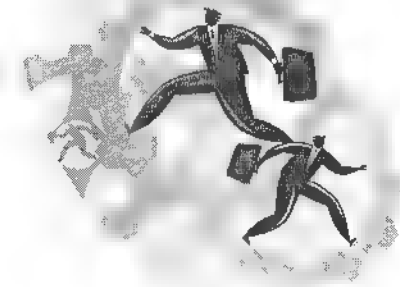
ومنه  $z' + 1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 1)$  وبالتالي التحويل هو دوران زاويته  $\frac{\pi}{2}$  ولاحة مركزه 1 .

التمرين 134

تعطى النقطتان  $A$  و  $B$  , لاحتقاهما - على الترتيب -  $a$  و  $b$  .  
ارسم المربع  $ABCD$  في الاتجاه المباشر ( عكس عقارب الساعة ) .  
ما هي  $\omega$  لاحتقة  $\Omega$  مركز المربع  $ABCD$  ؟



يكفي أن نلاحظ أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  أي أن :  $b - \omega = i(a - \omega)$  ومنه  $\omega(i - 1) = ia - b$  وبالتالي لاحتقة  $\Omega$  هي :  $\omega = \frac{b - ia}{1 - i}$



قوم نفسك في  
الأعداد المركبة

## 5 نقاط

## التمرين 1

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة  $z^2 - 2z + 2 = 0$

2. لتكن  $M, L, K$  نقاطا لاحقاتها، على الترتيب، هي :

$$z_M = -i\sqrt{3}, \quad z_L = 1-i, \quad z_K = 1+i$$

علم (ارسم) هذه النقاط في المستوي المباشر المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

وحدة الرسم  $2cm$ . سنكمل الشكل في الأسئلة الموالية.

3. (a) لتكن النقطة  $N$  نظيرة النقطة  $M$  بالنسبة للنقطة  $L$ .

تحقق من أن لاحقة النقطة  $N$  هي  $z'_N = 2+i(\sqrt{3}-2)$ .

(b) ليكن الدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول النقطة  $M$  إلى النقطة  $A$

ويحول النقطة  $N$  إلى النقطة  $C$ .

عين لاحقة صورة النقطة  $L$  بهذا الدوران  $r$ .

(c) ليكن الانسحاب  $t$  الذي شعاعه  $\vec{u}$  ذو اللاحقة  $2i$  والذي يحول النقطة  $M$  إلى

النقطة  $D$  ويحول النقطة  $N$  إلى النقطة  $B$ .

عين  $z_D$  و  $z_B$  لاحقتي النقطتين  $D$  و  $B$ .

عين لاحقة صورة النقطة  $L$  بهذا الانسحاب  $t$ .

4. (a) بين أن  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ . ماذا تستنتج فيما يتعلق بالمثلث  $ABC$ ؟

(b) ما هي طبيعة الرباعي  $ABCD$ ؟

## 5 نقاط

## التمرين 2

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{C} - \{-i\}$  كما يلي :  $f(z) = \frac{z-2i}{z+i}$

1. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $f(z) = -\frac{4i}{z}$  :  $(E)$  وليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$

2. اكتب  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل المثلثي ثم بين أن :  $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{2007} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{2007} = 0$

3. في المستوي المباشر المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

(a) عين مجموعة النقاط  $M$  التي لاحقتها  $z$  تحقق  $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ .

(  $\text{Re}(f(z))$  : الجزء الحقيقي للعدد  $f(z)$  )

(b) نعتبر النقط  $A(\sqrt{3}-i)$  ،  $B(-\sqrt{3}-i)$  ،  $C(i\alpha)$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي موجب عين قيمة العدد  $\alpha$  بحيث يكون  $ABC$  مثلثا متساوي الأضلاع.

6 نقاط

التمرين 3

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس ومباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  (وحدة الرسم  $2\text{cm}$ ) ، تعطى النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  التي لواحقها على الترتيب :

$$c = 2 + 2i , b = 1 - i\sqrt{3} , a = 2$$

من أجل كل نقطة  $M$  من المستوي ، لاحتقها  $z$  ، نعتبر النقطة  $M_1$  صورة النقطة  $M$

بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  ونعتبر النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  صورة  $M_1$  بالانسحاب الذي شعاعه  $-2\vec{e}_1$ .

أخيرا نرمز بالرمز  $T$  للتحويل الذي يرفق بكل نقطة  $M$  النقطة  $M'$ .

(a.1) اكتب العدد  $b$  على الشكل الأسّي.

(b) علم النقطتين  $A$  و  $C$  ثم أنشئ النقطة  $B$  ثم النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالتحويل  $T$ .

(a.2) برهن أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  :  $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 2$

(b) عين  $c'$  لاحقة  $C'$ .

(c) عين الشكل الجبري للعدد  $\frac{c'}{c}$ .

(d) استنتج أن المثلث  $OCC'$  قائم . احسب مساحته بـ  $\text{cm}^2$ .

(e) عين النقطة التي صورتها  $O$  بالتحويل  $T$ .

3. نضع  $z = x + iy$  ، حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان .

(a) من أجل كل عدد مركب  $z$  غير معدوم ، اكتب ، بدلالة  $x$  و  $y$  ، الجزء الحقيقي

$$\frac{z'}{z}$$

(b) عين  $(E)$  مجموعة نقط المستوي  $M$  ، بحيث يكون المثلث  $OMM'$  قائما في  $O$ .

ارسم  $(E)$ .

6 نقاط

التمرين 4

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس ومباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

(وحدة الرسم  $1\text{cm}$ ) ، تعطى النقط  $A_1$  ،  $A_2$  ،  $A_3$  التي لواحقها على الترتيب :

$$z_2 = -4 - i , z_1 = -1 - 4i , z_0 = 5 - 4i$$

(a.1) تحقق من وجود تشابه مباشر وحيد  $S$  ، بحيث :  $S(A_0) = A_1$  و  $S(A_1) = A_2$

(b) تأكد من أن الكتابة المركبة لـ  $S$  هي :  $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$

(c) استنتج نسبة وزاوية التشابه  $S$  و لاحقة مركزه  $\Omega$ .

(d) نعتبر نقطة  $M$  لاحتقها  $z$  مع  $z \neq 0$  وصورتها  $M'$  لاحتقها  $z'$ .

تحقق من العلاقة  $\omega - z' = i(z - z')$  . استنتج طبيعة المثلث  $\Omega MM'$

2. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، نعرف النقطة  $A_{n+1}$  كما يلي :  $A_{n+1} = S(A_n)$

$$u_n = A_n A_{n+1}$$

(a) علم النقط  $A_0$  ،  $A_1$  ،  $A_2$  و أنشئ هندسيا النقط  $A_3$  ،  $A_4$  ،  $A_5$  ،  $A_6$ .

(b) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية.

3.  $(v_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$

(a) اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(b) هل المتتالية  $(v_n)$  متباعدة ؟

4. (a) احسب  $r_n$  نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $\Omega A_n A_{n+1}$  ، بدلالة  $n$ .

(b) عين أصغر عدد طبيعي  $p$  ، بحيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$r_n < 10^{-2} \text{ فإن } n > p$$

5 نقاط

التمرين 5

في المستوي المباشر المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

(وحدة الرسم  $8\text{cm}$ ) ، نعتبر النقطة  $M_0$  ذات اللاحقة  $z_0 = 1$

لتكن النقطة  $M_1$  ذات اللاحقة  $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_0$  والنقطة  $M_2$  ذات اللاحقة  $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_1$

والنقطة  $M_3$  ذات اللاحقة  $z_3 - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_2$  وبشكل عام نعتبر النقطة  $M_{n+1}$  ذات اللاحقة

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي.}$$

1. عين الطويلة و عمدة لكل من الأعداد  $z_1, z_2, z_3$  ثم علم النقاط  $M_1, M_2, M_3$ .
2. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نرمز بالرمز  $\rho_n$  لطويلة العدد  $z_n$ .

(a) عين طبيعة المتتالية  $(\rho_n)$ .

(b) احسب المجموع  $S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n$  ، بدلالة  $n$ .

(c) عين نهاية  $S_n$  عندما تنتهي  $n$  إلى  $+\infty$ .

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $z_{n+1} + z_n = i\sqrt{3}z_{n+1}$  ،

استنتج أن المثلث  $OM_n M_{n+1}$  قائم في  $M_{n+1}$ .

#### 4 نقاط

#### التمرين 6

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

ليكن العدد المركب  $z = x + iy$  حيث  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ولتكن النقطة  $M$  صورة  $z$ .

$$U = \frac{-iz + 3 - 4i}{z - i} \text{ نضع}$$

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $U = z$ .

(2) بين أن  $\text{Re}(U) = \frac{4x - 4y + 4}{x^2 + (y - 1)^2}$  (الجزء الحقيقي للعدد  $U$ )

و  $\text{Im}(U) = \frac{-(x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3)}{x^2 + (y - 1)^2}$  (الجزء التخيلي للعدد  $U$ )

(3) عين ثم أنشئ المجموعتين :

$$(F) = \{M_{(z)} / U \in i\mathbb{R}\} , (E) = \{M_{(z)} / U \in \mathbb{R}\}$$

(4) ليكن العدد المركب  $z$  الذي طويلته  $1 - \sqrt{3}$  و  $\frac{\pi}{3}$  عمدة له.

$$1 - z = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})(1 - i) \text{ أ- تحقق أن}$$

ب- احسب طويلة  $(1 - z)$  وعمدة له.

ج- لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط لواحقها على الترتيب :  $1 - z$  و  $z$  و  $1 - z$  بين أن الرباعي  $OBAC$  متوازي أضلاع.

#### 3.5 نقاط

#### التمرين 7

(1) أ- عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $i$ .

ب- اكتب هذين الجذرين على الشكل المثلثي.

(2) نعتبر في  $\mathbb{C}$  كثير الحدود :  $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (1 + i)z - (1 + i)$

أ- بين أن المعادلة  $P(z) = 0$  تقبل حلا تخيليا صرفا  $z_1$  يطلب تحديده.

ب- تحقق من أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  :  $P(z) = (z - z_1)(z^2 - 2z + 1 - i)$

ج- حل المعادلة  $P(z) = 0$  :  $(E)$ .

نسمي  $z_2$  ، حل المعادلة  $(E)$  بحيث  $\text{Im}(z_2) > 0$

ونسمي  $z_3$  ، حل المعادلة  $(E)$  بحيث  $\text{Im}(z_3) < 0$

(3) أ- بين أن :  $z_3 = \left[2 \cos \frac{3\pi}{8}, \frac{-3\pi}{8}\right]$  ،  $z_2 = \left[2 \cos \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$

ب- استنتج قيمتي  $\cos \frac{3\pi}{8}$  و  $\sin \frac{3\pi}{8}$ .

ج- لتكن  $n$  من  $\mathbb{Z}$  عين قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $(z_1)^n$  حقيقي.

#### 3 نقاط

#### التمرين 8

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

نعتبر العددين المركبين  $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  لاحقتي النقطتين  $A, B$

1- أثبت أن  $A$  و  $B$  تنتميان للدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1.

2- أ) تحقق من أن  $a^3 = 1$  و  $a^2 = -1 - a = \bar{a}$  (هو مرافق العدد  $a$ )

ب) اكتب على الشكل المثلثي الأعداد :  $a^2b$  ،  $ab$  ،  $b$ .

3- لتكن  $C, D$  صورتا العددين  $ab$  و  $a^2b$  على التوالي

أ) عين قيسي الزاويتين  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$  ،  $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$

ب) استنتج أن المثلث  $DCB$  متساوي الأضلاع.

4- أ) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 + bz + b^2 = 0$

ب) استنتج حلول المعادلة :



2. عين طبيعة الرباعي  $OBAC$ .

3. عين وأنشئ مجموعة النقط  $M$  من المستوي بحيث  $|z| = |z - 2|$ .

الجزء ب:

من أجل كل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$  بحيث  $z \neq z_A$ ، نرفق بها النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$

المعرفة كما يلي:  $z' = \frac{-4}{z-2}$ .

(a.1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z = \frac{-4}{z-2}$ .

(b) استنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين  $B$  و  $C$ .

(c) عين وعلم  $G'$  النقطة المرفقة بمركز ثقل المثلث  $OAB$ .

(a.2) سؤال من الدرس:

علمت أن طولية عدد مركب كفي  $z$ ، يرمز إليها بالرمز  $|z|$

ولدينا  $|z|^2 = z\bar{z}$  حيث  $\bar{z}$  هو مرافق  $z$ .

برهن أن:

• من أجل كل عددين مركبين  $z_1$  و  $z_2$ ،  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ .

• من أجل كل عدد مركب غير معدوم  $z$ ،  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ .

(b) برهن أنه من أجل كل عدد مركب يختلف عن 2،

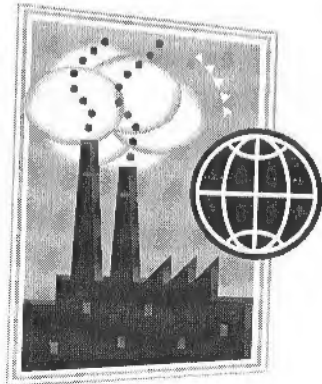
$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$$

(c) نفرض، في هذا السؤال، أن  $M$  نقطة كيفية من  $\mathcal{D}$  حيث  $\mathcal{D}$  هي المجموعة المعرفة

في السؤال 3 من الجزء أ.

برهن أن النقطة  $M'$  المرفقة بـ  $M$  تنتمي إلى دائرة  $\Gamma$ ، بطلب تعيين مركزها و

نصف قطرها. ارسم  $\Gamma$ .



$$(E): z^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 0 \text{ في } \mathbb{C}.$$

5 نقاط

التمرين 9

الجزء A: المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

من أجل رسم الشكل نأخذ كوحدة رسم  $1\text{cm}$ .

لتكن  $P$  النقطة التي لاحقتها  $p$  حيث  $p = 10$ . ولتكن  $\Gamma$  الدائرة التي قطرها  $[OP]$

نرمز بالرمز  $\Omega$  لمركز الدائرة  $\Gamma$ .

لتكن النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب  $a, b, c$  حيث:

$$c = 8 - 4i \text{ و } b = 1 + 3i, a = 5 + 5i$$

1. برهن أن النقط  $A, B, C$  من الدائرة  $\Gamma$ .

2. لتكن  $D$  النقطة التي لاحقتها  $2 + 2i$ .

برهن أن  $D$  هي المسقط العمودي للنقطة  $O$  على المستقيم  $(BC)$

الجزء B: من أجل كل نقطة  $M$  من المستوي تختلف على  $O$ ، لاحقتها  $z$  نرفق بها النقطة

$M'$  ذات اللاحقة  $z'$  بحيث:  $z' = \frac{20}{z}$ ، مع  $\bar{z}$  هو مرافق  $z$ .

1. برهن أن النقط  $O, M, M'$  على استقامة واحدة.

2. ليكن  $\Delta$  المستقيم الذي معادلته  $x = 2$  ولتكن  $M$  نقطة من  $\Delta$  لاحقتها  $z$ .

نقترح تعريف النقطة  $M'$  المرفقة بالنقطة  $M$  هندسيا

(a) تحقق من أن  $z + \bar{z} = 4$ .

(b) اكتب  $z' + \bar{z}'$  بدلالة  $z$  و  $\bar{z}$  ثم استنتج أن  $z' \bar{z}' = z \bar{z}$ .

(c) استنتج أن  $M'$  تنتمي إلى تقاطع المستقيم  $(OM)$  مع الدائرة  $\Gamma$ .

علم  $M'$  على الشكل.

5 نقاط

التمرين 10

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس ومباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

(وحدة الرسم  $2\text{cm}$ )، نعتبر النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب:

$$z_C = 1 - i\sqrt{3}, z_B = 1 - i, z_A = 2$$

الجزء:

(a.1) أعط الشكل الأسّي للعدد  $z_B$  ثم للعدد  $z_C$ .

(b) علم النقط  $A, B, C$ .

## الفهرس

الصفحة	العنوان
05	المقدمة
09	الدالة العددية - مجموعة تعريف دالة
10	التمثيل البياني لدالة - الدالة الزوجية والدالة الفردية
13	الدالة الدورية - محور ومركز التناظر
14	عمليات على النهايات
14	أفكار لحساب النهايات
16	السلوك التقاربي لمنحن
17	ملخص السلوك التقاربي لمنحن
18	تمارين مقترحة
42	العدد المشتق
42	تفسير هندسي للعدد المشتق
43	الدالة المشتقة
44	عمليات على الدوال المشتقة
46	تمارين مقترحة
62	اتجاه تغير دالة
63	القيم الحدية - نقطة الانعطاف
64	مخطط دراسة دالة
64	أمثلة على دراسة الدوال الناطقة
67	أمثلة على دراسة الدوال الصماء
71	التمارين المقترحة (دراسة الدوال الناطقة)
111	التمارين المقترحة (دراسة الدوال الصماء)
115	الدوال الأصلية
115	الدوال الأصلية لدوال مألوفة
116	القواعد العامة لحساب الدوال الأصلية
117	التمارين المقترحة
122	الدالة الأسية : تعريف - نتائج
123	الدالة الأسية : الخواص - الرمز $e^x$
123	الدالة الأسية : السلوك التقاربي
123	الدالة الأسية : التقريب التآلفي للدالة الأسية عند 0
123	الدالة الأسية : التزايد المقارن
124	الدالة المشتقة للدالة $e^u$
125	الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

125	الدالة اللوغاريتمية النيبيرية : الخواص
125	الدالة اللوغاريتمية النيبيرية : النهايات
125	الدالة اللوغاريتمية النيبيرية : الدالة المشتقة
126	الدالة المشتقة للدالة $\ln u$
126	الدالة اللوغاريتمية العشرية
127	التمارين المقترحة ( الدالة الأسية )
158	التمارين المقترحة ( الدالة اللوغاريتمية النيبيرية )
174	الترايد المقارن للدوال الأسية ودوال القوى واللوغاريتمات
176	الحساب التكاملي : التعريف - الخواص
176	التكامل بالتجزئة
177	حساب المساحات
178	التمارين المقترحة
191	تمارين ومسائل التقويم الذاتي

## المتتاليات

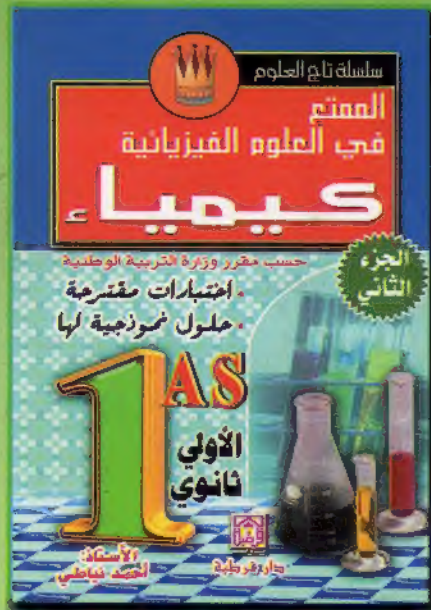
207	المتتالية العددية : تعريف - توليد
208	اتجاه تغير متتالية
209	نهاية متتالية - تقارب متتالية
209	نهاية متتالية مرفقة بدالة
210	نهاية متتالية باستعمال الحصر
210	المتتاليتان المتجاورتان
210	البرهان بالتراجع
211	التمارين المقترحة
229	المتتالية الحسابية : تعريف - الحد العام
130	المتتالية الحسابية : مجموع حدود متتابعة
131	المتتالية الهندسية : تعريف - الحد العام
233	المتتالية الهندسية : مجموع حدود متتابعة
233	نهاية متتالية هندسية
234	ملخص المتتاليتين ، الحسابية والهندسية
235	التمارين المقترحة
253	تمارين ومسائل التقويم الذاتي

## الأعداد المركبة

263	الشكل الجبري - الحساب في $\mathbb{C}$
264	التمارين المقترحة (الشكل الجبري)
267	الشكل المثلثي - الطويلة والعمدة
267	ترميز أولر
268	الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي
270	دستور موافر - دستور أولر
270	التمارين المقترحة ( الشكل المثلثي )

276	الأعداد المركبة والهندسة
278	طبيعة بعض مجموعات النقط
280	التمارين المقترحة
285	المعادلات من الدرجة الثانية
288	مخطط دراسة معادلة من الدرجة الثانية
289	التمارين المقترحة
292	الأعداد المركبة والتحويلات النقطية
293	التطبيق $z \rightarrow z' = az + b$
293	التمارين المقترحة
297	تمارين ومسائل التقويم الذاتي
307	الفهرس





دار قرطبة